Hausaufgabenblatt 11:

Aufgabe 1:

a) Zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0: \; P[|X_n - 0| > \varepsilon] \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Sei also $\varepsilon > 0$ und o.B.d.A. $\varepsilon < 1$. Außerdem $n \geq 2$.

$$P[|X_n| > \varepsilon] = P\left[\left|\sum_{k=1}^{\infty} 1\!\!1_{\{N_k = n\}}\right| > \varepsilon\right] = P\left[\sum_{k=1}^{\infty} 1\!\!1_{\{N_k = n\}} > \varepsilon\right] \quad (*)$$

Da die Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt sind und $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \mathbb{N}\setminus\{1\}$,

bilden $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Partition von $\mathbb{N}\setminus\{1\}$. $(**)$

Es folgt für das existierende $\tilde{k}$ mit $2^{\tilde{k}} \leq n < 2^{\tilde{k}+1}$.

$$(*) = \mathbb{P}\left[1\!\!1_{\{N_{\tilde{k}} = n\}} > \varepsilon\right] = \mathbb{P}\left[\{N_{\tilde{k}} = n\}\right] = \frac{1}{2^{\tilde{k}}}$$

Außerdem „folgt aus $n \to \infty$, $\tilde{k} \to \infty$". (und umgekehrt)

Es folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}[|X_n| > \varepsilon] = \lim\limits_{\tilde{k}\to\infty} 2^{-\tilde{k}} = 0$

b) Zeige sogar $\forall \omega \in \Omega: X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$, was die Behauptung impliziert.

Zeige dazu: $\forall \omega \in \Omega \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists n \geq N: X_n(\omega) = 1$.

Sei also $\omega \in \Omega$ und $N \in \mathbb{N}$ beliebig.

Wähle nun ein $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ mit $2^{\tilde{k}} \geq N$. Es folgt $N_{\tilde{k}}(\omega) = \tilde{n}$ für ein $2^{\tilde{k}} \leq \tilde{n} < 2^{\tilde{k}+1}$.

Mit $(**)$ folgt $X_{\tilde{n}}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} 1\!\!1_{\{N_k(\omega) = \tilde{n}\}} = 1$.

Es folgt die Behauptung.

Aufgabe 2:

a) Nach Vorlesung gilt für $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $a > 0$.

$$a^2\, \mathbb{P}\left[|X - \mathbb{E}_P[X]| \geq a\right] \leq \mathbb{V}ar_P(X) \iff \mathbb{P}\left[|X - \mathbb{E}_P[X]| \geq a\right] \leq \frac{\mathbb{V}ar_P(X)}{a^2}$$

Es folgt, da $\mathbb{E}_P[|X_\mu|] = \mathbb{E}_P[X_\mu] = \mu > 0$ und damit auch $X_\mu \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

$$q := \mathbb{P}\left[|X_\mu - \mu| \geq \frac{\mu}{2}\right] \leq \frac{\mathbb{V}ar_P(X_\mu)}{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2} = \frac{\mu}{\frac{\mu^2}{4}} = \frac{4}{\mu}$$

Also für $\mu = 1000$: $q \leq \frac{4}{1000} \approx 0{,}004000$;

b) Es gilt: $\mathbb{P}\left[|X_\mu - \mu| \geq \frac{\mu}{2}\right] = \mathbb{P}\left[X_\mu \geq \frac{3}{2}\mu\right] + \mathbb{P}\left[X_\mu \leq \frac{\mu}{2}\right]$

Weiter gilt nach Vorlesung für eine ZV $X \geq 0$, $s \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq e^{-sa}\, \mathbb{E}_P[e^{sX}] \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X \leq a] \leq e^{-sa}\, \mathbb{E}_P[e^{sX}]$$

Berechne daher zunächst:

$$\mathbb{E}_P[e^{sX_\mu}] = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} e^{sk} \left(e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^k}{k!}\right) = e^{-\mu} \cdot \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{(e^s \cdot \mu)^k}{k!} = \exp(e^s\mu - \mu)$$

Es folgt: $\mathbb{P}\left[X_\mu \geq \frac{3}{2}\mu\right] \leq e^{-s \cdot \frac{3}{2}\mu} \cdot \exp(e^s\mu - \mu) = \exp\left(e^s\mu - \mu - s \cdot \frac{3}{2}\mu\right) = f_1(s)$

Analog: $\mathbb{P}\left[X_\mu \leq \frac{\mu}{2}\right] \leq \exp\left(e^s\mu - \mu - \frac{1}{2}s\mu\right) = f_2(s)$

Weiter:

$$f_1'(s) = \left(e^s\mu - \frac{3}{2}\mu\right) \cdot \exp\left(e^s\mu - \mu - s \cdot \frac{3}{2}\mu\right)$$

$$f_2'(s) = \left(e^s\mu - \frac{1}{2}\mu\right) \cdot \exp\left(e^s\mu - \mu - s \cdot \frac{3}{2}\mu\right)$$

Weiter liefert $f_1'(s) = 0$, $s_1 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ und $f_2'(s) = 0$, $s_2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

Es gilt auch $f_1'(s) < 0$ für $s < s_1$ und $f_1'(s) > 0$ für $s > s_1$.

Damit ist $s_1 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ ein Minimum. Analoges kann für $s_2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ gefolgert werden.

Es folgt damit mit der exponentiellen Tschebyschoff-Ungleichung:

$$q = \mathbb{P}[X_\mu \geq \tfrac{3}{2}\mu] + \mathbb{P}[X_\mu \leq \tfrac{\mu}{2}] \leq \inf_{s \geq 0} f_1(s) + \inf_{s \geq 0} f_2(s) =$$

$$= \exp\left(\tfrac{3}{2}\mu - \mu - \ln\left(\tfrac{3}{2}\right) \cdot \tfrac{3}{2}\mu\right) + \exp\left(\tfrac{1}{2}\mu - \mu - \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1}{2}\right)\mu\right) =$$

$$= \exp\left(\tfrac{1}{2}\mu - \ln\left(\tfrac{3}{2}\right) \cdot \tfrac{3}{2}\mu\right) + \exp\left(-\tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \cdot \mu\right);$$

Also für $\mu = 1000$: $q \leq 1{,}0242 \cdot 10^{-47}$

c) Man sieht, dass die exponentielle Tschebyschoff Ungleichung ein weitaus besseres Ergebnis liefert.
Eine Programmierung bleibt jedem selbst überlassen.

Aufgabe 3:

a) Seien Z_i, $i \in \mathbb{N}$, i.i.d. ZVn mit Werten in $\{0,1\}$ auf einem W'Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Diese formalisieren die Ergebnisse der Würfe mit der fairen Münze.

Sei $X_n = (Z_n, Z_{n+1})$ die ZVe, die die n-te Sequenz formalisiert.

Es folgt für die Anzahl Amo's Treffer, falls er die Sequenz $(a_1, a_2) \in \{0,1\}^2$ gewählt hat und die Münze n-mal geworfen wird.

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k = (a_1, a_2)\}}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k = (a_1,a_2)\}}\right] = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_k = (a_1,a_2)\}}\right] =$$

$$= (n-1) \cdot \mathbb{P}\left[\{X_k = (a_1,a_2)\}\right] = (n-1) \cdot \mathbb{P}\left[(Z_k, Z_{k+1}) = (a_1,a_2)\right] \overset{Z_k, Z_{k+1} \text{ unabh.}}{=}$$

$$= (n-1) \cdot \mathbb{P}(Z_k = a_1) \cdot \mathbb{P}(Z_{k+1} = a_2) = (n-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n-1}{4};$$

b) Es gilt zunächst: ① Amo macht 2 Euro Gewinn, falls zweimal die Sequenz $(0,0)$ auftaucht, bevor zum ersten Mal $(1,0)$ erscheint. (Ereignis: A_1)

② Amo macht 2 Euro Verlust, falls zweimal die Sequenz $(1,0)$ auftaucht, bevor zum ersten Mal $(0,0)$ erscheint. (Ereignis: A_2)

③ In allen anderen Fällen beträgt die Auszahlung 0 Euro.

Bezeichne nun: $\bigcap_{i=1}^{n} \{Z_i = k_i\} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $k_i \in \{0,1\}$.

Es gilt nun $A_1 = (0,0,0)$, da sonst $Z_{\tilde{k}} = 1$ für ein $\tilde{k} \in \{1,2,3\}$ und damit aus $X_k = (0,0)$ für ein $k > \tilde{k}$ folgt: $\exists \tilde{k} \leq \ell < k : X_\ell = (1,0)$

Schreibweise: $1^\ell = \underbrace{1,\dots,1}_{\ell\text{-mal}}$ für $\ell \in \mathbb{N}_0$.

Weiter gilt: $A_2 = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} (0,1^\ell,1,0,1^k,1,0) \overset{\text{disjunkt}}{\dot\cup} \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} (1^\ell,1,0,1^k,1,0)$

Es folgt: $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}^3 = \frac{1}{8}$

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} (0,1^\ell,1,0,1^k,1,0)\Big) + \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} (1^\ell,1,0,1^k,1,0)\Big) =$$

alle Ereignisse disjunkt!

$$\overset{\downarrow}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} \mathbb{P}\big((0,1^\ell,1,0,1^k,1,0)\big) + \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} \mathbb{P}(1^\ell,1,0,1^k,1,0) =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} 2^{-k-\ell-5} + \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} 2^{-k-\ell-4} =$$

$$= 2^{-5} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{-k} \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} 2^{-\ell} + 2^{-4} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{-k} \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} 2^{-\ell} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}$$

Es folgt für den erwarteten Gewinn von Amo:

$$G = 2 \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

Aufgabe 4:

a) Es gilt, wie man leicht sehen kann:

$$P[N_{1,n}=n_1,\ N_{2,n}=n_2,\ N_{3,n}=n_3] = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}\cdot p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot p_3^{n_3},$$

da die $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. sind.

b) $m\cdot P[N_{1,mn}=mn_1,\ N_{2,mn}=mn_2,\ N_{3,mn}=mn_3] =$

$$= m\cdot\frac{(mn)!}{(mn_1)!\cdot(mn_2)!\cdot(mn_3)!}\cdot p_1^{mn_1}\cdot p_2^{mn_2}\cdot p_3^{mn_3} =$$

$$= m\cdot\frac{(mn)!}{(p_1mn)!\cdot(p_2mn)!\cdot(p_3mn)!}\cdot p_1^{p_1mn}\cdot p_2^{p_2mn}\cdot p_3^{p_3mn}\ (*)$$

Nun folgt im Limes $m\to\infty$ mit der Stirlingformel:

$$\lim_{m\to\infty}(*) = \lim_{m\to\infty} m\cdot\frac{\sqrt{2\pi}\,(mn)^{mn+\frac12}e^{-mn}\cdot p_1^{p_1mn}\,p_2^{p_2mn}\,p_3^{p_3mn}}{(\sqrt{2\pi})^3\,(p_1mn)^{p_1mn+\frac12}e^{-p_1mn}\,(p_2mn)^{p_2mn+\frac12}e^{-p_2mn}\,(p_3mn)^{p_3mn+\frac12}e^{-p_3mn}} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} m\cdot\frac{(mn)^{mn+\frac12}\cdot p_1^{p_1mn}\cdot p_2^{p_2mn}\cdot p_3^{p_3mn}}{2\pi\cdot p_1^{p_1mn}\cdot p_1^{\frac12}\cdot(mn)^{p_1mn}\cdot(mn)^{\frac12}\cdot p_2^{p_2mn}\cdot p_2^{\frac12}\cdot(mn)^{p_2mn}\cdot p_3^{p_3mn}\cdot p_3^{\frac12}\cdot(mn)^{p_3mn}\cdot mn} =$$

$\uparrow$ $p_1+p_2+p_3=1$

$\Rightarrow e^{-p_1mn-p_2mn-p_3mn}=e^{-mn}$

$$= \frac{1}{2\pi\cdot n\cdot p_1^{\frac12}\cdot p_2^{\frac12}\cdot p_3^{\frac12}};$$

$\nearrow$ $p_1+p_2+p_3=1$

Aufgabe 5:

a) Es gilt $X_0 = 1$ nach Vorraussetzung.

Weiter werden die $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ jetzt rekursiv definiert, wobei die 2 Fälle $X_t = 0$ und $X_t \geq 1$ unterschieden werden. ($X_t \in \mathbb{N}_0$ nach Vorraussetzung)

1. Fall: $(X_t \geq 1)$

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = X_t \,/\, X_t \geq 1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2};$$

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = X_t - 1 \,/\, X_t \geq 1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8};$$

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = X_t + 1 \,/\, X_t \geq 1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8};$$

2. Fall: $(X_t = 0)$

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = X_t \,/\, X_t = 0) = \frac{3}{4};$$

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = X_t + 1 \,|\, X_t = 0) = \frac{1}{4};$$

b) Setze $A_t = \mathbb{1}_{\left\{\sum_{i=3t-2}^{3t} z_i = 3\right\}} - \mathbb{1}_{\left\{\sum_{i=3t-2}^{3t} z_i = 2\right\}}$

und $B_t = \mathbb{1}_{\left\{\sum_{i=3t-2}^{3t} z_i \in \{0,3\}\right\}}$, $t \in \mathbb{N}$

Definiere nun X_t wieder rekursiv, mit $X_0 = 1$ und:

$$X_{t+1} = \begin{cases} X_t + A_t & \text{falls } X_t \geq 1 \\ B_t & \text{falls } X_t = 0 \end{cases}$$

Mit Induktion sieht man, dass X_t nur von den z_t abhängt, was verlangt war. Die Eigenschaften von a) werden in c) überprüft.

c) Man sieht, da die $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. sind, dass folgt:

$$\mathbb{P}(A_t = 1) = \frac{1}{8}, \ \mathbb{P}(A_t = 0) = \frac{1}{2}, \ \mathbb{P}(A_t = -1) = \frac{3}{8}$$

und analog:

$$\mathbb{P}(B_t = 0) = \frac{3}{4}, \ \mathbb{P}(B_t = 1) = \frac{1}{4}$$

Es folgt:

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = X_t \mid X_t \geq 1) = \mathbb{P}(X_t + A_t = X_t \mid X_t \geq 1) =$$
$$= \mathbb{P}(A_t = 0 \mid X_t \geq 1) = \mathbb{P}(A_t = 0) = \frac{1}{2}$$

Analog:

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = X_t - 1 \mid X_t \geq 1) = \mathbb{P}(A_t = -1) = \frac{3}{8}$$
$$\mathbb{P}(X_{t+1} = X_t + 1 \mid X_t \geq 1) = \mathbb{P}(A_t = 1) = \frac{1}{8}$$

Weiter folgt:

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = X_t \mid X_t = 0) = \mathbb{P}(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0) = \mathbb{P}(B_t = 0 \mid X_t = 0) =$$
$$= \mathbb{P}(B_t = 0) = \frac{3}{4}$$

Analog:

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = X_t + 1 \mid X_t = 0) = \mathbb{P}(B_t = 1) = \frac{1}{4}$$

Damit sind alle Bedingungen von a) erfüllt.

Aufgabe 6:

a) Jede Verteilungsfunktion ist rechtsstetig. Folglich genügt es die Linksstetigkeit zu zeigen.

Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \uparrow x$.

$$\lim_{y\uparrow x} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Z\le x_n] = \lim_{n\to\infty} \left[\mathbb{P}(Z\le x) - P(x_n < Z \le x)\right] =$$

$$= \mathbb{P}(Z\le x) - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(x_n < Z \le x) \underset{\uparrow}{=} \mathbb{P}(Z\le x) - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x_n < Z \le x\}\Big) =$$

Die Ereignisse $\{x_n < Z < x\}$ steigen ab.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ (x_n)\nearrow x}}{=} F(x) - \mathbb{P}(Z=x).$$

Es bleibt also zu zeigen: $P(Z=x)=0 \quad \forall x\in[0,1]$.

Sei $x_i\in\{0,1\}\ \forall i\in\mathbb{N}$ und $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die eindeutige Binärdarstellung von x.

d.h. $\sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i} x_i = x$.

Es folgt mit $q = \max\{p, (1-p)\}$.

$$\mathbb{P}(Z=x) = \mathbb{P}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} X_n = x\Big) = \mathbb{P}(X_n = x_n \ \ \forall n\in\mathbb{N}) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{X_n = x_n\}\Big) \overset{\text{unabhängig}}{=}$$

$$= \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{X_n = x_n\}) \le \prod_{n\in\mathbb{N}} q = \lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{ da } 0<q<1.$$

b) Setze $\tilde{M} = \{\omega\in\Omega \mid \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} p\}$, $\tilde{N} = \{\omega\in\Omega \mid \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\}$

Weiter sei $M = \{\sum_{n=1}^\infty 2^{-n} X_n(\omega) \mid \omega\in\tilde{M}\}$ und es gilt $\tilde{M}\cap\tilde{N} = \emptyset$.

Zeige nun $M\in\mathcal{B}[0,1]$.

Es gilt nun: $\tilde{M} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\ge N} \underbrace{\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(\omega) - p| \le \frac{1}{m}\}}_{\tilde{A}_{n,N,m}}$

Sei nun $A_{n,N,m} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n(\omega) \mid \omega \in \tilde{A}_{n,N,m} \right\}$

Da die Aussage $x \in A_{n,N,m}$ oder $x \notin A_{n,N,m}$ ~~abhängt~~ nur von einem endlichen Anfangsstück der Binärdarstellung von x abhängt, kann $A_{n,N,m}$ als endliche Vereinigung über Intervalle geschrieben werden.

$\Rightarrow A_{n,N,m} \in \mathcal{B}([0,1])$

$\Rightarrow M = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} A_{n,N,m} \in \mathcal{B}([0,1])$

Sei nun P_p das entsprechende Maß mit $P_p[X_n = 1] = p$ und $P_{\frac{1}{2}}$ das mit $P_{\frac{1}{2}}[X_n = 1] = \frac{1}{2}$.

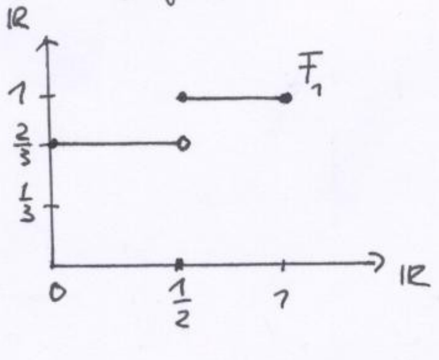
Es folgt mit dem starken Gesetz der großen Zahlen.

$\mu_p[M] = \mathbb{P}_p[\tilde{M}] = 1$

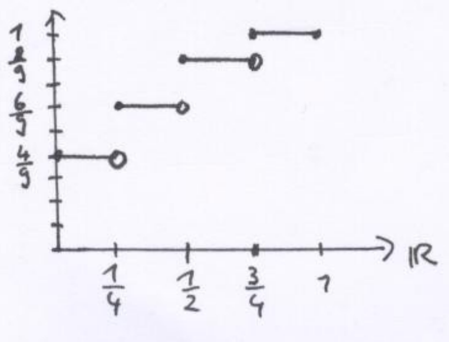
$\mu_{\frac{1}{2}}[M] = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[\tilde{M}] \leq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[\tilde{N}^c] = 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[\tilde{N}] = 1 - 1 = 0$

c) Sei $Z_1 = 2^{-1} X_1$ und $Z_2 = \sum_{n=1}^{2} 2^{-n} X_n$.

Es folgt für die Verteilungsfunktion von Z_1: (F_1)



Analog folgt für die Verteilungsfunktion F_2 von Z_2:



Die Stetigkeit der Verteilungsfunktion Z folgt erst im Limes $n \to \infty$ falls $Z_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} X_k$

Darüberhinaus ist aber Z auch fast-sicher konstant.

Deshalb fällt eine Zeichnung schwer, eine exakte Zeichnung ist unmöglich.

Es werden darum nur noch ein paar Punkte bestimmt.

$$F\left(\tfrac{1}{2}\right) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{2}{3}$$

$$F\left(\tfrac{1}{4}\right) = \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{4}{9}$$

$$F\left(\tfrac{3}{4}\right) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 0) + F\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$