Hausaufgabenblatt 10:

Aufgabe 1:

Zuerst berechnen wir:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY - X\mathbb{E}[Y] - Y\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]] =$$

$$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X\cdot \underbrace{\mathbb{E}[Y]}_{\text{Konstante}}] - \mathbb{E}[Y\cdot \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\text{Konstante}}] + \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]}_{\text{Konstante}}] =$$

$$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[Y]\cdot\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] =$$

$$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y] \quad (*)$$

Also insbesondere für $X = Y$:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X,X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Weiter gilt: $\mathrm{Cov}(X,Y) < \infty$, da:

$$\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hölder}}}{\leq} (\underbrace{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]}_{\mathbb{V}ar(X)})^{\frac{1}{2}} \cdot (\underbrace{\mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[Y])^2]}_{\mathbb{V}ar(Y)})^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Außerdem gilt $\mathbb{E}[X] < \infty$ und $\mathbb{E}[Y] < \infty$, da sonst $\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$ und $\mathbb{V}ar(Y) = \mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[Y])^2]$ nicht wohldefiniert wären.

Weiter folgt damit aus $(*)$ $\mathbb{E}[XY] < \infty$. Damit ist $(*)$ nun wohldefiniert.

Aufgabe 2:

a) $$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!}}_{e^\lambda} = \lambda$$

$$\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} - \lambda^2 =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} - \lambda^2 =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!}}_{e^\lambda} + e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!}}_{e^\lambda} - \lambda^2 = \lambda$$

$$\Rightarrow \sigma[X] = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)} = \sqrt{\lambda}.$$

b) $$\mathbb{E}[X] = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} n \cdot (1-p)^n \cdot p = p \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} n \cdot (1-p)^n = p \cdot (1-p) \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} n \cdot (1-p)^{n-1} =$$

$$= p \cdot (1-p) \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1) \frac{d}{dp} (1-p)^n \underset{\uparrow}{=} p \cdot (1-p)(-1) \frac{d}{dp} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} (1-p)^n \right) =$$

Vertauschung möglich, wegen der absoluten Konvergenz der geom. Reihe

$$= p \cdot (1-p)(-1) \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{1-(1-p)} \right) = p \cdot (1-p)(-1) \cdot \left(-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1-p}{p}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} n^2 \cdot p \cdot (1-p)^n = p \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}_0} n^2 \cdot (1-p)^n = p \cdot (1-p) \cdot (-1) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d}{dp} n \cdot (1-p)^n =$$

$$= p \cdot (p-1) \cdot \frac{d}{dp} \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}_0} n \cdot (1-p)^n}_{\text{siehe a)} = \frac{1-p}{p^2}} = p \cdot (p-1) \cdot \frac{d}{dp} \frac{(1-p)}{p^2} =$$

$$= p \cdot (p-1) \cdot \frac{p^2 \cdot (-1) - (1-p) \cdot 2p}{p^4} = \frac{(p-1) \cdot (p-2)}{p^2}$$

$$\mathbb{V}ar[X^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{(p-1) \cdot (p-2)}{p^2} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\Rightarrow \sigma[X] = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$$

c) Eine direkte Rechnung ist sehr mühsam, deshalb folgender Weg.

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, geometrisch verteilte ZVn.

Es folgt $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist negativ binomialverteilt mit Parameter $n \in \mathbb{N}$ und $p \in]0,1[$.

Beweis durch Induktion:

$n = 1$ Klar!

$n \rightsquigarrow n+1$:

Sei also $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ entsprechend binomialverteilt und Z geometrisch verteilt.

(jeweils mit gleichem Parameter $p \in]0,1[$).

Es folgt für $\tilde{Y} = Y + Z$:

$$\mathbb{P}(\tilde{Y} = \ell) = \sum_{k=0}^{\ell} \mathbb{P}(X=k) \cdot \mathbb{P}(Y = \ell - k) = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{k+n-1}{n-1} \cdot p^n \cdot (1-p)^k \cdot p \cdot (1-p)^{\ell-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{k+n-1}{n-1} \cdot p^{n+1} \cdot (1-p)^{\ell} \; (*)$$

Es gilt nun folgende Formel: $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$, $k, n, m \in \mathbb{N}_0$.

Damit folgt: $(*) = \binom{n-1+1+\ell}{n+1-1} \cdot p^{n+1} \cdot (1-p)^{\ell} = \binom{(n+1)+\ell-1}{(n+1)-1} \cdot p^{n+1} \cdot (1-p)^{\ell}$

Damit folgt $\tilde{Y}$ ist binomialverteilt mit Parameter $n+1$ und p.

$\Rightarrow$ Behauptung.

Es folgt: $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = n \cdot \mathbb{E}[X_1] = n \cdot \frac{(1-p)}{p}$

$$\mathbb{V}ar[Y] = \mathbb{V}ar[\sum_{i=1}^{n} X_i] \underset{(X_i)_i \text{ unabhängig}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar[X_i] = n \cdot \mathbb{V}ar[X_1] = n \cdot \frac{1-p}{p^2};$$

$$\Rightarrow \sigma[Y] = \frac{\sqrt{n \cdot (1-p)}}{p}$$

d) $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot x\,dx = \int_0^\infty x\, \frac{a^s}{\Gamma(a)}\, x^{s-1} e^{-ax}\,dx = \int_0^\infty \frac{a^s}{\Gamma(a)}\, x^s e^{-ax}\,dx =$

$$= \cancelto{0}{\left[\frac{a^s}{\Gamma(a)}\, x^s \left(-\frac{1}{a}\right) e^{-ax}\right]_0^\infty} - \int_0^\infty \frac{a^s}{\Gamma(a)}\, s\cdot x^{s-1}\left(-\frac{1}{a}\right) e^{-ax}\,dx =$$

$$= \frac{s}{a}\int_0^\infty \frac{a^s}{\Gamma(a)}\cdot x^{s-1} e^{-ax}\,dx = \frac{s}{a};$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot x^2\,dx = \int_0^\infty \frac{a^s}{\Gamma(s)}\cdot x^{s+1} e^{-ax}\,dx =$$

$$= \cancelto{0}{\left[\frac{a^s}{\Gamma(s)}\cdot x^{s+1}\left(-\frac{1}{a}\right) e^{-ax}\right]_0^\infty} + \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{a^s}{\Gamma(s)}\cdot (s+1)\cdot x^s e^{-as}\,ds =$$

$$= \frac{s+1}{a}\underbrace{\int_0^\infty \frac{a^s}{\Gamma(s)}\cdot x^s e^{-as}\,ds}_{\frac{s}{a}} = \frac{(s+1)\cdot s}{a^2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{(s+1)\cdot s}{a^2} - \frac{s^2}{a^2} = \frac{s}{a^2}$$

$$\Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)} = \frac{\sqrt{s}}{a}$$

e) Für die Dichte der Verteilung von X gilt: $f(x) = \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x)\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x}$

Es folgt: $X \sim \mathrm{Gamma}\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$

$\Rightarrow$ nach d): $\mathbb{E}[X] = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}} = n$

$$\mathbb{V}ar[X] = \frac{\frac{n}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2n$$

$$\sigma[X] = \sqrt{2n}$$

f) $\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{B(a,b)} x^a \cdot (1-x)^{b-1} dx =$

$= \left[\frac{1}{B(a,b)} \cdot x^a (1-x)^b \cdot \left(-\frac{1}{b}\right)\right]_0^1 + \frac{1}{b} \int_0^1 \frac{1}{B(a,b)} a \cdot x^{a-1} (1-x)^b dx =$

$= \frac{a}{b} \int_0^1 \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} dx - \frac{a}{b} \int_0^1 \frac{1}{B(a,b)} x^a \cdot (1-x)^{b-1} dx =$

$(1-x)^b = (1-x)^{b-1} \cdot (1-x)$

$= \frac{a}{b} - \frac{a}{b} \cdot \mathbb{E}[X]$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \frac{a}{b} - \frac{a}{b} \cdot \mathbb{E}[X] \Leftrightarrow \mathbb{E}[X] \cdot \left(1 + \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \mathbb{E}[X] = \frac{a}{a+b}$

$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^1 x^{a+1} \frac{1}{B(a,b)} (1-x)^{b-1} dx =$

$= \left[x^{a+1} \frac{1}{B(a,b)} \left(-\frac{1}{b}\right) (1-x)^b \right]_0^1 + \frac{1}{b} \int_0^1 (a+1) x^a \frac{1}{B(a,b)} \cdot (1-x)^b dx =$

$= \frac{a+1}{b} \int_0^1 \frac{1}{B(a,b)} x^a \cdot (1-x)^{b-1} dx - \frac{a+1}{b} \int_0^1 \frac{1}{B(a,b)} x^{a+1} (1-x)^{b-1} dx =$

$(1-x)^b = (1-x) \cdot (1-x)^{b-1}$

$= \frac{a+1}{b} \cdot \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{= \frac{a}{a+b}} - \frac{a+1}{b} \cdot \mathbb{E}[X^2]$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X^2] \cdot \left(1 + \frac{a+1}{b}\right) = \frac{a+1}{b} \cdot \frac{a}{a+b} \Leftrightarrow \mathbb{E}[X^2] = \frac{a+1}{b} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b+1} =$

$= \frac{a \cdot (a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$

$\Rightarrow \mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{a \cdot (a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

$\Rightarrow \sigma[X] = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)} = \sqrt{\frac{a \cdot b}{(a+b)^2 \cdot (a+b+1)}}$;

Aufgabe 3:

Gegeben sei ein W-Raum $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

Außerdem seien $(X_i)_{1 \le i \le k}$ eine Folge von ZVn von $\Omega \to \{1, \dots, m\}$, wobei alle X_i auf $\{1, \dots, m\}$ gleichverteilt sind.

Diese ZVn formalisieren das Aussuchen der Ente durch die Jäger.

Definiere nun für $1 \le l \le m$: $Y_l = \sum_{i=1}^{k} 1\!\!1_{\{X_i = l\}}$

Folglich gilt für $1 \le l \le m$: $Y_l : \Omega \to \{0, 1, \dots, k\}$

Die ZVn $(Y_l)_l$ sind nicht unabhängig, formalisieren wieviele Jäger auf die l-te Ente schießen.

Es folgt außerdem, dass die Y_l binomialverteilt sind zum Parameter $\frac{1}{m}$.

d.h. $\mathbb{P}(Y_l = x) = \binom{k}{x} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{k-x}$, $x \in \{0, 1, \dots, k\}$.

Definiere nun $Z_l : \Omega \to \{0, 1\}$ mit $\mathbb{P}(Z_l = 1) = (1-p)^{Y_l}$ $(1 \le l \le m)$

d.h. $\mathbb{P}[Z_l = 1 \,/\, Y_l = k] = (1-p)^k$, [und jeweils: $\mathbb{P}(Z_l = 0) = 1 - \mathbb{P}(Z_l = 1)$]

Diese ZVn sind nun '1' falls ~~dass~~ die Ente überlebt und '0' sonst.

Es folgt für den Erwartungswert der Anzahl unverletzter Enten. $(Z = \sum_{l=1}^{m} Z_l)$

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^{m} Z_l\right] = \sum_{l=1}^{m} \mathbb{E}[Z_l] \underset{\substack{\uparrow \\ (Z_l)_l \text{ identisch verteilt}}}{=} m \cdot \mathbb{E}[Z_1] = m \cdot \mathbb{P}[Z_1 = 1] =$$

$$= m \cdot \sum_{x=0}^{k} \mathbb{P}[Z_1 = 1 \,/\, Y_1 = x] \cdot \mathbb{P}[Y_1 = x] = m \cdot \sum_{x=0}^{k} (1-p)^x \cdot \binom{k}{x} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{k-x};$$

Aufgabe 4:

Eventueller Fehler in der Angabe: $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : Y_n \leq f(X_n)\}$

$$\mathbb{P}(\{\tau = \infty\}) = \mathbb{P}(\{Y_n > f(X_n) : \forall n \in \mathbb{N}\}) \underset{\uparrow}{=} \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{Y_n > f(X_n)\}) \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{Y_1 > f(X_1)\})^n$$

Unabhängigkeit der $(U_n)_n$ $(U_n)_n$ identisch verteilt

Weiter gilt: $\mathbb{P}(\{Y_1 > f(X_1)\}) = \varepsilon < 1$, da $f \neq 0$ f.s. da f eine W-Dichte auf $[0,1]$ und (X_1, Y_1) gleichverteilt auf R.

Es folgt: $\mathbb{P}(\{\tau = \infty\}) = \lim_{n\to\infty} \varepsilon^n = 0$. Sei jetzt $\prod_{i=1}^{0} x_i = 1$, $A \in \mathcal{B}([0,1])$.

$$\mathbb{P}(X_\tau \in A) = \mathbb{P}(\{X_\tau \in A\} \cap \Omega) \underset{\uparrow}{=} \mathbb{P}\Big(\{X_\tau \in A\} \cap \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} \{\tau = k\}\Big) =$$

da $\mathbb{P}(\{\tau < \infty\}) = 1$

$$= \mathbb{P}\Big(\dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} (\{X_k \in A\} \cap \{\tau = k\})\Big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{X_k \in A\} \cap \{\tau = k\}) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\Big((\{X_k \in A\} \cap \{Y_k \leq f(X_k)\}) \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} \{Y_i > f(X_i)\}\Big) =$$

unabhängig, da $(U_n)_n$ unabhängig

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{X_k \in A\} \cap \{Y_k \leq f(X_k)\}) \cdot \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k-1} \{Y_i > f(X_i)\}\Big) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{X_1 \in A\} \cap \{Y_1 \leq f(X_1)\}) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(\{Y_i > f(X_i)\}) =$$

$$= \mathbb{P}(\{X_1 \in A\} \cap \{Y_1 \leq f(X_1)\}) \cdot \sum_{k\in\mathbb{N}} \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(\{Y_i > f(X_i)\}) =$$

$$= \mathbb{P}(\{X_1 \in A\} \cap \{Y_1 \leq f(X_1)\}) \cdot \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \mathbb{P}(\{Y_1 > f(X_1)\})^k \overset{\text{geometrische Reihe}}{=}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{X_1 \in A\} \cap \{Y_1 \leq f(X_1)\})}{1 - \mathbb{P}(\{Y_1 > f(X_1)\})} = \frac{\mathbb{P}(\{X_1 \in A\} \cap \{Y_1 \leq f(X_1)\})}{\mathbb{P}(\{Y_1 \leq f(X_1)\})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,M]}(y) \cdot \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,f(x)]}(y) \, dx \, dy}{\frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,M]}(y) \cdot \mathbb{1}_{[0,f(x)]}(y) \, dx \, dy} =$$

$$= \frac{\frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \cdot \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,f(x)]}(y)\, dy\, dx}{\frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,f(x)]}(y)\, dy\, dx} =$$

$$= \frac{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) \cdot f(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{1}_{[0,1]}(x) \cdot f(x)}_{= f(x)}\, dx} = \int_A f(x)\, dx.$$

~~Aufgabe 5:~~

~~a)~~

Aufgabe 5:

a) Sei nun X_i eindimensional, normalverteilt mit Parameter 0 und 1. $(1 \leq i \leq n)$.

Es folgt (wie man leicht zeigen kann!):

$\mathbb{E}[\tilde{X}_i] = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq m$

$\mathbb{V}ar[\tilde{X}_i] = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq m$

Außerdem seien $(\tilde{X}_i)_{1 \leq i \leq m}$ unabhängig.

Es folgt für die Dichte von $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$.

$$f(x) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots f_n(x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)\right) =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^T x)\right);$$

$\Rightarrow \tilde{X} \sim \mathcal{N}(0, E)$ nach letztem Übungsblatt Aufgabe 5.

Sei nun $X \sim \mathcal{N}(b, A)$.

Da A symmetrisch und positiv definit, gibt es eine orthogonale Matrix O

mit $A = O \cdot D \cdot O^T$, wobei D eine Diagonalmatrix mit $D_{ii} > 0$ ist.

Setze: $B = O \cdot D^{\frac{1}{2}}$.

Es folgt: $A = B \cdot B^T$, wobei B regulär ist.

Nach letztem Übungsblatt Aufgabe 5 folgt jetzt.

$B \cdot \tilde{X} + b \sim \mathcal{N}(b, B \cdot E\, B^T) = \mathcal{N}(b, A)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[B \cdot \tilde{X} + b] = \underbrace{\mathbb{E}[B \cdot \tilde{X}]}_{=0} + \mathbb{E}[b] = b \quad \left[\text{Schreibweise: } \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[b_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[b_n] \end{pmatrix}\right]$$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X_i] = b_i \quad \forall 1 \leq i \leq n.$

b) $Cov(X_i, X_j) = Cov\left(\sum_{k=1}^{n} B_{ik}\tilde{X}_k + b_i, \sum_{l=1}^{n} B_{jl}\tilde{X}_l + b_j\right) =$

$$= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} B_{ik}\tilde{X}_k + b_i - \underbrace{b_i}_{\mathbb{E}[X_i]}\Big)\Big(\sum_{l=1}^{n} B_{jl}\tilde{X}_l + b_j - \underbrace{b_j}_{\mathbb{E}[X_j]}\Big)\Big] =$$

$$= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} B_{ik}\tilde{X}_k\Big)\Big(\sum_{l=1}^{n} B_{jl}\tilde{X}_l\Big)\Big] = \sum_{k,l=1}^{n} B_{ik} B_{jl}\, \mathbb{E}[\tilde{X}_k \tilde{X}_l] =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} B_{ik} B_{jl} \underbrace{Cov[\tilde{X}_k, \tilde{X}_l]}_{\delta_{kl}} = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} B_{jk} = a_{ij}, \quad i,j = 1,\dots,n$$

c) Es gilt $\mathbb{E}[X_i] = b_i$.

$\mathbb{V}ar[X_i] = Cov(X_i, X_i) = a_{ii}$

Außerdem ist X_i als Randverteilung einer multidimensionalen Normalverteilung wieder normalverteilt.

$\Rightarrow X_i \sim \mathcal{N}(b_i, a_{ii})$

Aufgabe 6.

Sei $B_n(r)$ die n-dimensionale Kugel mit Radius $r \geq 0$.

Sei $B_n = B_n(1)$ die n-dimensionale Einheitskugel.

Sei $A \in \mathcal{B}([-1,1])$.

$$\mathbb{P}(X_{1/n} \in A) = \frac{1}{\lambda_n(B_n)} \int_A \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}}}_{n-1} \mathbb{1}_{B_n}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n(B_n)} \int_A \int_{\mathbb{R}} \dots\dots \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B_{n-1}(\sqrt{1-x_1^2})}(x_2, \dots, x_n) \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(x_1)\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n(B_n)} \int_A \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B_{n-1}(\sqrt{1-x_1^2})}(x_2, \dots, x_n)\, dx_n \dots dx_2\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(x_1)\, dx_1 =$$

$$= \int_A \frac{1}{\lambda_n(B_n)} \cdot \lambda_{n-1}\left(B_{n-1}\left(\sqrt{1-x_1^2}\right)\right) \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(x_1)\, dx_1$$

Es folgt für die Dichte f der Verteilung von X_{1n}.

$$f(x_1) = \frac{1}{\lambda_n(B_n)} \cdot \lambda_{n-1}\left(B_{n-1}\left(\sqrt{1-x_1^2}\right)\right) \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(x_1) = \frac{\lambda_{n-1}(B_n)}{\lambda_n(B_n)} \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(x_1) \cdot (1-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}};$$

Berechne jetzt die Dichte der Verteilung von $\sqrt{n}\, X_{1n}$ und deren Limes.

Setze: $g^{-1}(x) = \sqrt{n}\, x$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{n}}$$

$|\mathrm{Det}\, Dg(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Da g ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus folgt für die Dichte h_n der Verteilung von $\sqrt{n}\, X_{1n}$.

$$h_n(x_1) = f \circ g(x_1) \cdot |\mathrm{Det}\, Dg(x_1)| = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\lambda_{n-1}(B_n)}{\lambda_n(B_n)}}_{c_n} \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}\left(\frac{x_1}{\sqrt{n}}\right) \cdot \left(1 - \frac{x_1^2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} =$$

$$= c_n \cdot \mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]}(x_1) \cdot \left(1 - \frac{x_1^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x_1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\downarrow n \to \infty \qquad \downarrow n \to \infty \qquad \downarrow n \to \infty$$

$$1 \qquad e^{-\frac{x_1^2}{2}} \qquad 1$$

(Alle Grenzwerte punktweise)

Da $h_n(x_1)$ für $n \to \infty$ ebenfalls eine Dichte ist, folgt $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Es folgt $h_n(x_1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2}}$

Damit konvergieren auch die Verteilungsfunktionen entsprechend.

$\Rightarrow$ Behauptung