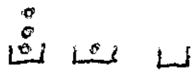
Hausaufgabenblatt 1

Aufgabe 1:

a) $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m) \;/\; \omega_i \in \{0, 1, \dots, n\}, \sum_{i=1}^{m} \omega_i = n\}$

Ein $\omega \in \Omega$ gibt also nun an, wie viele Kugeln sich jeweils in einer Schachtel befinden.
(ω_1 gibt an wieviele Bälle sich in Schachtel 1 befinden, ω_2 wieviele in Schachtel 2 usw.)

<u>Bsp.</u> 3 Schachteln, 4 Bälle  $\omega = (3, 1, 0)$

b) Sei nun $\tilde{\Omega} = \{1, \dots, 6\}^2 \times \{0, 1, \dots, 6\}^5$

Also nun: $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_7)$, wobei $\omega_1, \omega_2 \in \{1, \dots, 6\}$ und $\omega_3, \omega_7 \in \{0, 1, \dots 6\}$.

ω_1 gibt die Augenzahl von Würfel 1 an.
ω_2 " 2 an
ω_3 " 2 bei einem evtl. 2. Wurf an

$\omega_3 = 0$ bedeutet: Es wird Würfel 2 <u>nicht</u> ein zweites Mal geworfen.

Analog: $\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7$

Es müssen nun aber noch Ereignisse, wie bspw. $(1, 1, \dots 1)$ die nicht möglich sind ausgeschlossen werden.

$\Rightarrow \Omega = \{\omega \in \tilde{\Omega} \;/\; \omega_i = 0 \text{ für } i \geq \omega_1 + 2, \omega_i \neq 0 \text{ für } i < \omega_1 + 2 \;\forall 1 \leq i \leq 7\}$

c) $\tilde{\Omega} = (\mathbb{R}^3 \cup \{i\})^{\mathbb{N}}$

Es folgt: $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$ wobei $\omega_i \in \mathbb{R}^3 \cup \{i\} \; \forall i \in \mathbb{N}$ den Ort des i-ten Teilchens angibt.

~~Wenn~~ $\omega_i = i$ bedeutet, dass kein i-tes Teilchen mehr gezogen wurde.

$\tilde{\Omega}$ muss nun aber ebenfalls eingeschränkt werden.

$$\Omega = \{\omega \in \tilde{\Omega} \,/\, \exists n \in \mathbb{N} \,/\, \forall 1 \le k \le n : \omega_k \neq i, \; \forall k > n, \omega_k = i\}$$

Falls die Teilchen ununterscheidbar sind, wird dasselbe Ω verwendet.

Nun gilt aber: $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ wobei $\omega_i \in \mathbb{R}^3 \cup \{i\} \; \forall 1 \le i \le n$.

Jedes Ereignis ist also eine "normale" Menge

Aufgabe 2:

i) Es gilt nach Vorlesung: Falls $A_n \in \mathcal{A} \; \forall n \in \mathbb{N}$ folgt: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ (*)

Es folgt: i) $A \cap B = \underbrace{\underset{\in \mathcal{A}}{A} \cap \underset{\in \mathcal{A}}{B} \cap \underset{\in \mathcal{A}}{\Omega} \cap \underset{\in \mathcal{A}}{\Omega} \cap \dots}_{\in \mathcal{A}}$

Formal: Setze: $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_i = \Omega$, $i \geq 3 \Rightarrow$ Beh. nach (*)

ii) $A \setminus B = \underbrace{\underset{\in \mathcal{A}}{A} \cap \underset{\in \mathcal{A}}{B^C}}_{\in \mathcal{A} \text{ nach i)}}$

iii) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \underbrace{\underbrace{(\underset{\in \mathcal{A}}{A} \cap \underset{\in \mathcal{A}}{B^C})}_{\in \mathcal{A} \text{ nach ii)}} \cup \underbrace{(\underset{\in \mathcal{A}}{B} \cap \underset{\in \mathcal{A}}{A^C})}_{\in \mathcal{A} \text{ nach i) oder ii)}}}_{\in \mathcal{A} \text{ nach Vorlesung}}$

Aufgabe 3:

Lösung durch Nachprüfen der definierenden Eigenschaften einer σ-Algebra und anschließendem Finden der Partition.

a) $A_1 = \{1,3,5\}$, $A_2 = \{3,6\}$

$\Rightarrow P_1 = \{\{1,5\},\{2,4\},\{3\},\{6\}\}$

b) $A_1 = \{2,4,6\}$, $A_2 = \{4,5,6\}$

$\Rightarrow P_2 = \{\{1,3\},\{2\},\{4,6\},\{5\}\}$

c) $A_1 = \{2,4,6\}$, $A_2 = \{4,5,6\}$, $A_3 = \{1,6\}$

$\Rightarrow P_3 = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}$

Aufgabe 4.

Zeige zuerst: $\sigma(\mathcal{M})$ ist eine σ-Algebra.

i) $\Omega \in \sigma(\mathcal{M})$, da $\Omega \subseteq \Omega$ und $\Omega \in \mathcal{A}$ $\forall$ σ-Algebren $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{M}$ nach der Definition einer σ-Algebra

ii) Es sei $A \in \sigma(\mathcal{M})$, d.h. $A \subseteq \Omega$ und $A \in \mathcal{A}$ $\forall$ σ-Algebren $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{M}$
Da $A^c = \Omega \setminus A$ folgt: $A^c \subseteq \Omega$ und ebenfalls folgt $A^c \in \mathcal{A}$, da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Dies folgt nun für alle σ-Algebren $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{M}$ nach Vorraussetzung. $\Rightarrow A^c \in \sigma(\mathcal{M})$

iii) Sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\sigma(\mathcal{M})$.
d.h. $A_n \subseteq \Omega$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\mathcal{A}$ $\forall$ σ-Algebren $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{M}$
Es folgt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \Omega$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ $\forall$ σ-Algebren $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{M}$

$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma(\mathcal{M})$

iv) Sei nun $A \in \mathcal{M}$. Es folgt $A \in \mathcal{A}$ $\forall \sigma$-Algebren $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{M}$.

$$\Longrightarrow A \in \sigma(\mathcal{M})$$

$$\Longrightarrow \mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{M})$$

Aufgabe 5:

a) $$\{\omega \in \Omega : \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \omega \in A_n\} = \underbrace{\bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \underbrace{\bigcap_{n \geq n_0} \underset{\in \mathcal{A}}{A_n}}_{\in \mathcal{A}}}_{\in \mathcal{A}}$$

b) $$\{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\} =$$

$$= \{\omega \in \Omega : \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n \geq n_0 : \omega \in A_n\} = \underbrace{\bigcap_{n_0 \in \mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{n \geq n_0} \underset{\in \mathcal{A}}{A_n}}_{\in \mathcal{A}}}_{\in \mathcal{A}}$$

Aufgabe 6:

a) $$[a,b] = \underbrace{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{]a - \tfrac{1}{n}, b + \tfrac{1}{n}[}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$$

Bemerkung:

Dies gilt auch für $b = a$!

b) $$]a,b] = \underbrace{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{]a, b + \tfrac{1}{n}[}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \qquad [a,b[= \underbrace{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{]a - \tfrac{1}{n}, b[}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$$

c) $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, wobei $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ beliebig

$$A = \{a_1, a_2, \dots\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\} = \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{[a_n, a_n]}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$$

d) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar $\Rightarrow \mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ nach c) $\Rightarrow \mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

e) $\{x \in [0,1[$: die Dezimaldarstellung von x enthält unendlich oft die Ziffer 3, aber niemals die Ziffer 7$\} =$

(*) $= \{x \in [0,1[$: die Dezimaldarstellung von x enthält unendlich oft die Ziffer 3$\} \cap$

$\cap \{x \in [0,1[$: " niemals die Ziffer 7$\}$

Setze nun $A_1 = [7 \cdot 10^{-1}; 8 \cdot 10^{-1}[$ ~~[redacted]~~ $= [0{,}7; 0{,}8[$

Für $i \geq 2$: $\underbrace{A_i}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} = \bigcup_{k=1}^{i-1} \bigcup_{d=0}^{9} \underbrace{A_{i,k}^d}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$, wobei $A_{i,k}^d = [7 \cdot 10^{-i} + d \cdot 10^{-k}; 8 \cdot 10^{-i} + d \cdot 10^{-k}[$

Die Menge A_i beinhaltet also alle $x \in [0,1[$ bei deren Dezimaldarstellung an der i-ten Stelle eine 7 steht.

Analog: $B_1 = [0{,}3; 0{,}4[$

Für $i \geq 2$: $B_i = \underbrace{\bigcup_{k=1}^{i-1} \bigcup_{d=0}^{9} \underbrace{B_{i,k}^d}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$, wobei $B_{i,k}^d = [3 \cdot 10^{-i} + d \cdot 10^{-k}; 4 \cdot 10^{-i} + d \cdot 10^{-k}[$

Es folgt: $(*) = \underbrace{\underbrace{\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} \underbrace{B_k}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}\Big)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \cap \underbrace{\Big(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{A_i^c}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}\Big)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$