Blatt Nr. 9 Prof. F. Merkl

Übungen zur Stochastik
WS 2007/08
Abgabe: Montag, den 17.12.2007, bis 12:30 Uhr

**Aufgabe 1** **(2 Punkte)**
**Faltung von Poissonverteilungen.** Es seien $X$ und $Y$ zwei unabhängige, poissonverteilte Zufallsvariablen zu den Parametern $\mu$ bzw. $\nu$. Zeigen Sie: $X+Y$ ist poissonverteilt mit dem Parameter $\mu+\nu$.
*Erinnerung:* Die Poissonverteilung mit dem Parameter $\mu > 0$ ist die folgende Verteilung auf $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$:

$$\text{Poisson}(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu}}{k!}\mu^k \delta_k$$

**Aufgabe 2** **(2 Punkte)**
**Faltung von 3 Gleichverteilungen.** Es seien $X$, $Y$ und $Z$ unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Berechnen und skizzieren Sie die Dichte von $X+Y+Z$.

**Aufgabe 3** **(2 Punkte)**
**Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung.** Der zufällige Geschwindigkeitsvektor $V$ eines Moleküls der Masse $m$ in einem Gas der absoluten Temperatur $T$ besitzt die Dichte

$$f(v) = \frac{1}{Z} e^{-H(v)/(kT)}, \quad v \in \mathbb{R}^3$$

bezüglich des dreidimensionalen Lebesguemaßes, wobei $H(v) = m\|v\|_2^2/2$ die kinetische Energie zum Geschwindigkeitsvektor $v$, $Z$ eine Normierungskonstante und $k$ die sogenannte Boltzmannkonstante bezeichnen. Zeigen Sie: Die zufällige kinetische Energie $H(V)$ eines Moleküls ist gammaverteilt. Bestimmen Sie die Parameter dieser Gammaverteilung. Die Verteilung des zufälligen Geschwindigkeitsbetrags $\|V\|_2$ heißt *Maxwellverteilung*. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte der Maxwellverteilung.

**Aufgabe 4** **(1+3 Punkte)**
**Der Poissonprozess.** Wir betrachten folgendes Modell für kumulierte Wartezeiten: Eine (idealisierte) Glühlampe kann eine zufällige, exponentialverteilte Zeit (Parameter $a > 0$) betrieben werden, bevor sie kaputt geht. Zur Zeit $t = 0$ wird eine Glühlampe in Betrieb genommen. Sobald sie kaputt geht, wird eine neue Glühlampe in Betrieb genommen; sobald diese kaputt geht, wieder eine neue, usw. Die Betriebszeiten der Glühlampen seien unabhängig voneinander.

a) Identifizieren Sie die Verteilung des zufälligen Zeitpunkts $T_n$, zu dem die $n$-te Glühlampe kaputt geht.

b) Für festes $t > 0$ sei $N_t$ die zufällige Anzahl der Glühlampen, die bis zur Zeit $t$ kaputt gegangen sind. Zeigen Sie: $N_t$ ist poissonverteilt. (Insbesondere ist $N_t$ fast sicher endlich.) Berechnen Sie den Parameter dieser Poissonverteilung.

**Bitte wenden.**

**Aufgabe 5** **(2+1+3 Punkte)**
**Multidimensionale Normalverteilungen.** Es seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Die $n$-dimensionale Normalverteilung $\mathrm{N}(b, A)$ mit den Parametern $b$ und $A$ ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Dichte

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2}(\det A)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-b)^\top A^{-1}(x-b)\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(Hier fassen wir $x$ und $b$ als Spaltenvektoren auf, und $y^\top$ bezeichne die Transponierte eines Vektors oder einer Matrix $y$.) Die $n$-dimensionale Standardnormalverteilung ist der Spezialfall $\mathrm{N}(0, \mathbf{1}_n)$, wobei $\mathbf{1}_n$ die $n \times n$ Einheitsmatrix bezeichnet.

a) Zeigen Sie: Ist $X$ ein $\mathrm{N}(b, A)$-verteilter Zufallsvektor und sind $c \in \mathbb{R}^n$ und $L \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix, so besitzt $LX + c$ die Verteilung $\mathrm{N}(Lb + c, LAL^\top)$.

b) Zeigen Sie: Ist $(X_1, \ldots, X_n)$ $n$-dimensional standardnormalverteilt und ist $m < n$, so ist $(X_1, \ldots, X_m)$ $m$-dimensional standardnormalverteilt.

c) Folgern Sie aus a) und b): Ist $X$ ein $\mathrm{N}(b, A)$-verteilter Zufallsvektor und sind $c \in \mathbb{R}^m$ und $L \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine $m \times n$-Matrix vom Rang $m < n$, so besitzt $LX + c$ ebenfalls die Verteilung $\mathrm{N}(Lb + c, LAL^\top)$.
*Hinweis:* Zerlegen Sie die affin-lineare Abbildung $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\ell(x) = Lx+c$ in eine Komposition von drei affin-linearen Abbildungen $\ell_3 \circ \ell_2 \circ \ell_1$, wobei $\ell_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\ell_3 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ invertierbar sein sollen, $\mathcal{L}(\ell_1(X)) = \mathrm{N}(0, \mathbf{1}_n)$, und $\ell_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\ell_2(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$ die Projektion auf die ersten $m$ Koordinaten sein soll.

**Aufgabe 6** **(2+2 Punkte)**
**Faltung multidimensionaler Normalverteilungen.** Es seien $X$ und $Y$ unabhängige, multidimensional normalverteilte Zufallsvektoren mit Werten in $\mathbb{R}^n$; sagen wir $\mathcal{L}(X) = \mathrm{N}(b, A)$, $\mathcal{L}(Y) = \mathrm{N}(b', A')$, wobei $b, b' \in \mathbb{R}^n$ und $A, A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definite $n \times n$-Matrizen sind.

a) Zeigen Sie: Der Zufallsvektor $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ mit Werten in $\mathbb{R}^{2n}$ ist multidimensional normalverteilt mit den Parametern $\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$.

b) Folgern Sie: $X + Y$ ist $\mathrm{N}(b + b', A + A')$-verteilt.
*Hinweis:* Wenden Sie den Teil c) der vorherigen Aufgabe auf die Additionsabbildung $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an.