Blatt Nr. 8 Prof. F. Merkl

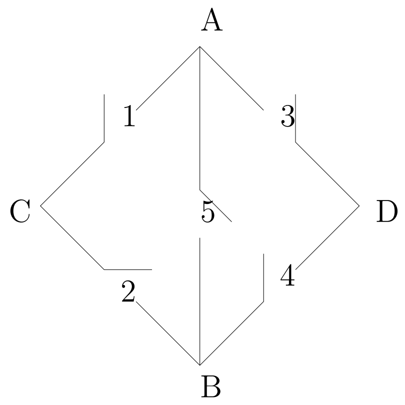
Übungen zur Stochastik
WS 2007/08
Abgabe: Montag, den 10.12.2007, bis 12:30 Uhr

Aufgabe 1 **(3 Punkte)**
Dezimalstellen als i.i.d. Zufallsvariablen. Es sei P die Gleichverteilung auf $(\Omega, \mathcal{A}) = ([0,1[, \mathcal{B}(\Omega))$. Weiter sei $X_n(\omega) \in \{0,1,2,\ldots,9\}$, $n \in \mathbb{N}$, die n-te Nachkomma-Dezimalstelle von $\omega \in [0,1[$, also

$$X_n(\omega) = \lfloor 10^n \omega \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} \omega \rfloor,$$

wobei $\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$. Zeigen Sie: Die Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind bezüglich P unabhängig und auf $\{0,1,2,\ldots,9\}$ gleichverteilt.

Aufgabe 2 **(4+6+1 Punkte)**
Ein elektrisches Schaltnetz. Betrachten Sie das folgende elektrische Schaltnetz:



Es bezeichne S_i, $i = 1, \ldots, 5$, das Ereignis, dass Schalter Nr. i stromdurchlässig ist.

a) Stellen Sie die Ereignisse E_{AB} und E_{CD}, dass Strom von A nach B bzw. von C nach D fließen kann, durch Mengenoperationen mit den Ereignissen S_i dar.

b) Nehmen Sie ab jetzt an, dass die Ereignisse S_i unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit $P(S_i) = p$ eintreten.
Berechnen Sie $P(E_{AB})$, $P(E_{CD})$ und $P(E_{AB} \cap E_{CD})$.

c) Man beobachtet, dass von C nach D Strom fließen kann. Bedingt auf diese Information, mit welcher Wahrscheinlichkeit kann Strom von A nach B fließen?

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**
Gemeinsame Dichte unabhängiger Zufallsvariablen. *Zeigen Sie entweder die folgende "konkrete Variante" oder die "abstrakte Variante" zur Unabhängigkeit von Zufallsvariablen mit Dichten:*

a) **"konkrete Variante":** Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariablen mit Dichten f bzw. g. Zeigen Sie: X und Y sind unabhängig genau dann, wenn $h : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty]$, $h(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ eine Dichte des Zufallsvektors $Z = (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ist.

Bitte wenden.

b) **"abstrakte Variante":** Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien für $i = 1, 2$ ein Maßraum $(\Sigma_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ und eine Zufallsvariable $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Sigma_i, \mathcal{B}_i)$ mit Dichte $f_i : \Sigma_i \to [0, \infty]$ bezüglich μ_i gegeben. Zeigen Sie: X_1, X_2 sind unabhängig genau dann, wenn

$$h : \Sigma_1 \times \Sigma_2 \to [0, \infty], \quad h(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$$

eine Dichte für $Z = (X_1, X_2) : \Omega \to \Sigma_1 \times \Sigma_2$ bezüglich $\mu_1 \times \mu_2$ ist.

Aufgabe 4 **(2+2+2+2 Punkte)**

Eine Verallgemeinerung der Simulation durch "Ausdünnung". Es seien $f, g : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ zwei Wahrscheinlichkeitsdichten. Es gelte $g \leq c \cdot f$ mit einer Konstanten $c > 0$. Nun seien X und U zwei unabhängige Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Die Zufallsvariable X besitze die Dichte f bezüglich P. Zudem sei U bezüglich P uniform auf $]0, 1[$ verteilt. Zeigen Sie:

a) Die Verteilung $\mathcal{L}_P(Z)$ von $Z = (X, f(X)U)$ ist die Gleichverteilung auf $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < f(x)\}$.

b) Bezüglich des bedingten Maßes $P(\cdot | cf(X)U < g(X))$ besitzt X die Dichte g.

c) Schlagen Sie ein Verfahren zur Simulation einer Zufallszahl mit Dichte g vor, wenn Zufallszahlen mit Dichte f und auf $]0, 1[$ gleichverteilte Zufallszahlen (alle unabhängig voneinander) zur Verfügung stehen.

d) Schlagen Sie als eine Anwendung ein Verfahren zur Simulation einer standardnormalverteilten Zufallszahl vor, wenn cauchyverteilte Zufallszahlen (zu einem Parameter Ihrer Wahl) und auf $]0, 1[$ gleichverteilte Zufallszahlen (alle unabhängig voneinander) zur Verfügung stehen.

Aufgabe 5 **(6^*+6^*+1^* Punkte)**

Zufällige Sehnen im Kreis. Es soll eine zufällige Sehne $[A, B]$ im Einheitskreis S^1 gezogen werden. Betrachten Sie dazu folgende drei Modelle:

1. Die beiden Endpunkte A, B der Sehne werden unabhängig voneinander zufällig nach der Gleichverteilung auf S^1 gezogen.

2. Der eine Endpunkt A der Sehne wird zufällig nach der Gleichverteilung auf S^1 gezogen. Dann wird die Tangente durch A um A um einen zufälligen, von A unabhängigen, auf $]0, \pi[$ gleichverteilten Winkel Φ gedreht. B sei der zweite Schnittpunkt der Einheitskreislinie mit der gedrehten Geraden.

3. Es wird eine Sehne parallel zur x-Achse durch einen zufälligen Punkt $(0, Y)$ gezeichnet, wobei Y gleichverteilt auf $]-1, 1[$ sein soll. Diese Sehne wird um einen zufälligen Winkel Φ um den Nullpunkt gedreht, wobei Φ unabhängig von Y und gleichverteilt auf $[0, 2\pi[$ sein soll.

a) Beschreiben Sie diese drei Modelle formal mit je einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsmodell $(\Omega, \mathcal{A}, P_i)_{i=1,2,3}$ über der Menge Ω der Sehnen im Einheitskreis.

b) Zeigen Sie, dass die P_i, $i = 1, 2, 3$, wechselseitig Dichten zueinander besitzen, und berechnen Sie diese.

c) Stimmen die drei Modelle überein? Begründung?