Blatt Nr. 7 Prof. F. Merkl

Übungen zur Stochastik
WS 2007/08
Abgabe: Montag, den 3.12.2007, bis 12:30 Uhr

Aufgabe 1 **(2+2+2 Punkte)**
Die vier Seiten eines unfairen Tetraeders sind mit den Augenzahlen 1 bis 4 beschriftet. Ein Wurf des Tetraeders liefert eine zufällige Augenzahl X, und zwar die Augenzahl k mit der Wahrscheinlichkeit $k/10$. Weiter seien 4 Urnen gegeben. Urne Nr. k enthält $k-1$ rote Bälle und $4-k$ blaue Bälle, $k = 1, 2, 3, 4$. Nun werden aus der zufälligen Urne mit der Nummer X zwei Bälle mit Zurücklegen gezogen.

a) Geben Sie ein Wahrscheinlichkeitsmodell $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (mit Interpretation) und eine Zufallsvariable X an, die dieses zweistufige Zufallsexperiment beschreibt.

b) Berechnen Sie P[Beide gezogenen Bälle sind rot].

c) Man beobachtet, dass beide gezogenen Bälle rot sind. Gegeben diese Beobachtung, mit welcher Wahrscheinlichkeit kamen sie aus der Urne $k \in \{1, 2, 3, 4\}$?

Aufgabe 2 **(2+1+2 Punkte)**
Eine Urne enthält eine rote und eine blaue Kugel. Man entnimmt dreimal hintereinander zufällig eine Kugel und legt sie zurück in die Urne zusammen mit einer neuen Kugel der jeweils anderen Farbe.

a) Geben Sie ein Wahrscheinlichkeitsmodell an, das dieses dreistufige Zufallsexperiment beschreibt. Veranschaulichen Sie es sich dazu mit einem Baumdiagramm.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind am Ende des Experiments drei rote und zwei blaue Kugeln in der Urne?

c) Man beobachtet, dass am Ende des Experiments drei rote und zwei blaue Kugeln in der Urne sind. Bedingt auf diese Beobachtung, mit welcher Wahrscheinlichkeit kam die neue blaue Kugel im 1. bzw. 2. bzw. 3. Schritt in die Urne?

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**
Ein Verfahren zur Simulation standardnormalverteilter Zufallszahlen. Es seien U und V zwei unabhängige, uniform auf $]0, 1[$ verteilte Zufallsvariablen.[1] Wir setzen $R = \sqrt{-2 \log U}$ und

$$\begin{aligned} X &= R \cos(2\pi V), \\ Y &= R \sin(2\pi V). \end{aligned}$$

Zeigen Sie: X und Y sind unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen.
Bitte wenden.

[1] Anders gesagt: $\mathcal{L}_P(U, V)$ sei die Gleichverteilung auf $(]0, 1[^2, \mathcal{B}(]0, 1[^2))$.

Aufgabe 4 **(3 Punkte)**

Hintergrundvariablen. Zur Behandlung von Warzen bietet eine Apotheke die Salben "Warzab" und "Verrolose" an. Zur Untersuchung der Wirksamkeit der beiden Salben wird bei den Käufern eine Umfrage durchgeführt. Dies führt zu folgendem Modell:

$$\begin{aligned} P[A] &= 0.73, & & \\ P[B|A] &= 0.69, & P[B|A^c] &= 0.2, \\ P[C|A\cap B] &= 0.62, & P[C|A^c\cap B] &= 0.82, \\ P[C|A\cap B^c] &= 0.06, & P[C|A^c\cap B^c] &= 0.07 \end{aligned}$$

mit den Bezeichnungen

A bzw. A^c:	Salbe "Warzab" bzw. "Verrolose" wird verwendet.
B bzw. B^c:	Salbe wird bei Erwachsenem bzw. Kind angewendet.
C bzw. C^c:	Behandlung ist erfolgreich bzw. erfolglos.

Berechnen Sie $P[C|A]$ und $P[C|A^c]$ und interpretieren Sie das Resultat: Welche Salbe wirkt besser?

Aufgabe 5 **(3^* Punkte)**

Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Ereignisraum, $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Ereignisräumen und $(X_i : \Omega \to \Omega_i)_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen. Zeigen Sie: Alle Abbildungen X_i, $i \in I$, sind $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_i$-meßbar genau dann, wenn die Produktabbildung

$$X : \Omega \to \prod_{i\in I} \Omega_i, \quad X(\omega) = (X_i(\omega))_{i\in I}$$

$\mathcal{A}$-$\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i$-meßbar ist.

Aufgabe 6 **($2^* + 2^* + 2^*$ Punkte)**

Eine Problematik bedingter Wahrscheinlichkeiten im Kontinuum. Seien $\Omega =]0,\infty[\times\mathbb{R}$, P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f > 0$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, und $X : \Omega \to]0,\infty[$ bzw. $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ die beiden kanonischen Projektionen. Wir wollen für $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die bedingte Wahrscheinlichkeit von $X \in C$ gegeben $Y = aX + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen.[2] Interpretieren Sie das Problem auf zwei Weisen:

a) Sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben und $B_a := Y - aX$. Berechnen Sie die gemeinsame Dichte von B_a und X, also die Dichte zu der Verteilung $\mathcal{L}_P(B_a, X)$. Berechnen Sie damit $P[X \in C|B_a = b] =: g(a, b, C)$, $b \in \mathbb{R}$.

b) Sei $b \in \mathbb{R}$ gegeben und $A_b := \frac{Y-b}{X}$. Berechnen Sie die gemeinsame Dichte von A_b und X, also die Dichte zu der Verteilung $\mathcal{L}_P(A_b, X)$. Berechnen Sie damit $P[X \in C|A_b = a] =: h(a, b, C)$, $a \in \mathbb{R}$.

c) Vergleichen Sie $g(a, b, C)$ mit $h(a, b, C)$. Stimmt das Ergebnis mit Ihren Erwartungen überein? Erläutern Sie. Gibt es ein solches Phänomen auch im diskreten Fall?

[2] Beachten Sie, dass die elementare Definition $P(A|B) = P(A\cap B)/P(B)$ hier auf den undefinierten Ausdruck $0/0$ führt.