

Übungen zur Stochastik  
WS 2007/08

Abgabe: Montag, den 26.11.2007, bis 12:30 Uhr

**Aufgabe 1** **(2 Punkte)**

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $B \in \mathcal{A}$  ein Ereignis mit  $P(B) > 0$ . Zeigen Sie: Die Abbildung zur bedingten Wahrscheinlichkeit,  $P(\cdot|B) : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ,  $A \mapsto P(A|B)$ , ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

**Aufgabe 2** **(2 Punkte)**

Es seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$  zwei Wahrscheinlichkeitsdichten.<sup>1</sup> Weiter sei  $P$  das Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$  mit der Dichte  $h(x, y) = f(x)g(y)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Berechnen Sie die Dichte von  $\mathcal{L}_P(X + Y)$ , wobei  $X$  bzw.  $Y$  die beiden kanonischen Projektionen von  $\mathbb{R}^2$  bezeichnen.

**Aufgabe 3** **(3+1+1 Punkte)**

Es sei  $P$  das Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}(\mathbb{R}^3))$  mit der Dichte

$$f(x, y, z) = e^{-x-y-z} 1_{]0, \infty[}(x) 1_{]0, \infty[}(y) 1_{]0, \infty[}(z)$$

bezüglich des dreidimensionalen Lebesguemaßes  $\lambda_3$ . Weiter seien  $X$  bzw.  $Y$  bzw.  $Z$  die Projektionen von  $\mathbb{R}^3$  auf die 1. bzw. 2. bzw. 3. Koordinate, sowie  $S = X + Y + Z$ .

- Berechnen Sie die Dichte der Verteilung  $\mathcal{L}_P(X/S, Y/S, S)$  bezüglich  $\lambda_3$ .
- Folgern Sie: Die Verteilung  $\mathcal{L}_P(X/S, Y/S)$  ist die Gleichverteilung auf dem Dreieck  $D = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > 0, b > 0, a + b < 1\}$ .
- Berechnen Sie die Dichte von  $X/S$  bezüglich des Lebesguemaßes auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

**Aufgabe 4** **(2+2\*+1\* Punkte)**

**Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung.** Ein radioaktiver Atomkern zerfällt nach einer zufälligen endlichen Zeit  $T > 0$ .

- Nehmen Sie an, dass die Wartezeit  $T$  exponentialverteilt mit dem Parameter  $a > 0$  ist, also die Dichte  $F(t) = ae^{-at} 1_{]0, \infty[}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , besitzt. Zeigen Sie, dass der Atomkern "gedächtnislos" im folgenden Sinn ist:  
Für alle  $t > 0$  gilt  $P(T > t) > 0$ , und  $T - t$  bedingt auf das Ereignis  $T > t$  hat die gleiche Verteilung wie  $T$  (unbedingt).
- Zeigen Sie umgekehrt: Ist der Atomkern gedächtnislos im obigen Sinn, so ist  $T$  exponentialverteilt mit einem geeigneten Parameter  $a > 0$
- Halten Sie die Exponentialverteilung für ein plausibles Modell auch für andere Wartezeiten, z.B. die Dauer von Telefongesprächen?

**Bitte wenden**

---

<sup>1</sup>Alle Dichten sind bezüglich des Lebesguemaßes in der richtigen Dimension gemeint.

### Aufgabe 5

(2+1+2 Punkte)

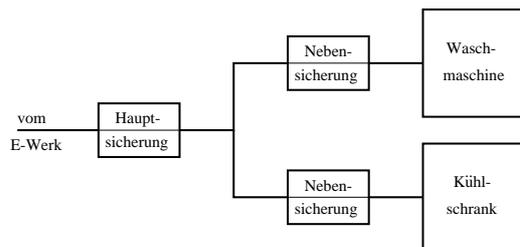
Eine Urne enthält eine rote und eine blaue Kugel. Man entnimmt dreimal hintereinander zufällig eine Kugel und legt sie zurück in die Urne zusammen mit einer neuen Kugel der jeweils anderen Farbe.

- Geben Sie ein Wahrscheinlichkeitsmodell an, das dieses dreistufige Zufallsexperiment beschreibt. Veranschaulichen Sie es sich dazu mit einem Baumdiagramm.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind am Ende des Experiments drei rote und zwei blaue Kugeln in der Urne?
- Man beobachtet, dass am Ende des Experiments drei rote und zwei blaue Kugeln in der Urne sind. Bedingt auf diese Beobachtung, mit welcher Wahrscheinlichkeit kam die neue blaue Kugel im 1. bzw. 2. bzw. 3. Schritt in die Urne?

### Aufgabe 6

(2+4 Punkte)

Die Schachtel *A* enthält 7 Hauptsicherungen, von denen genau 2 defekt sind. Die Schachtel *B* enthält 7 Nebensicherungen, von denen genau 3 defekt sind. Die drei Sicherungen zu folgendem Schaltbild werden zufällig aus den jeweiligen Schachteln gezogen (ohne Zurücklegen).



- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass weder an der Waschmaschine noch am Kühlschrank Spannung anliegt?
- Man stellt fest, dass weder an der Waschmaschine noch am Kühlschrank Spannung anliegt. Welche der beiden folgenden Strategien sollte man anwenden, um mit möglichst hoher Wahrscheinlichkeit beide Maschinen zum Laufen zu bringen?

**Strategie H:** Die Hauptsicherung wird durch eine andere Sicherung ersetzt, die aus der Schachtel *A* (mit den 6 übrig gebliebenen Sicherungen) zufällig gezogen wird.

**Strategie N:** Die beiden Nebensicherungen werden durch zwei andere Sicherungen ersetzt, die aus der Schachtel *B* (mit den 5 übrig gebliebenen Sicherungen) zufällig gezogen werden.