

Übungen zur Stochastik  
WS 2007/08  
Abgabe: Montag, den 19.11.2007, bis 12:00 Uhr

**Aufgabe 1****(1+1 Punkte)**

Es seien  $(\Omega, \mathcal{A})$ ,  $(\Omega', \mathcal{A}')$  und  $(\Omega'', \mathcal{A}'')$  Ereignisräume. Weiter seien  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}'$ -meßbar und  $g : \Omega' \rightarrow \Omega''$   $\mathcal{A}'$ - $\mathcal{A}''$ -meßbar. Zeigen Sie:

- a) Die Abbildung  $g \circ f$  ist  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}''$ -meßbar.
- b) Ist  $\mu$  ein Maß auf  $(\Omega, \mathcal{A})$ , so gilt für die Bildmaße:  $g[f[\mu]] = g \circ f[\mu]$ .

**Aufgabe 2****(2 Punkte)**

Die Poissonverteilung zum Parameter  $\mu > 0$  ist das Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$  mit der Zähldichte

$$p_n = e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Schlagen Sie ein Verfahren vor (mit Begründung), mit dem man eine poissonverteilte Zufallszahl simulieren kann, wenn ein Zufallszahlengenerator zur Verfügung steht, der eine uniform auf  $]0, 1[$  verteilte Zufallszahl liefert.

**Aufgabe 3****(1+1+1 Punkte)**

Die Cauchyverteilung zum Parameter  $a > 0$  ist das Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  mit der Dichte

$$f_a(x) = \frac{c_a}{a^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

mit einer Konstanten  $c_a > 0$ .

- a) Bestimmen Sie  $c_a$ .
- b) Beschreiben und begründen Sie ein Verfahren, mit dem man eine cauchyverteilte Zufallszahl zum Parameter  $a > 0$  simulieren kann, wenn ein Zufallszahlengenerator zur Verfügung steht, der eine uniform auf  $]0, 1[$  verteilte Zufallszahl liefert.
- c) Es sei  $X$  eine cauchyverteilte Zufallsvariable zum Parameter  $a > 0$ . Weiter sei  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Zeigen Sie:  $bX$  ist ebenfalls cauchyverteilt, und identifizieren Sie den Parameter.

**Bitte wenden**

**Aufgabe 4****(1+2+1 Punkte)**

Es sei  $X$  eine standardnormalverteilte Zufallsvariable.

- a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von  $X^2$ .  
*Hinweis:* Diese Verteilungsfunktion kann nicht elementar dargestellt werden. Im Ergebnis darf daher ein Integral stehen bleiben.
- b) Zeigen Sie, dass die Verteilung von  $X^2$  eine Dichte  $f$  bezüglich des Lebesguemaßes besitzt, und berechnen Sie diese.
- c) Folgern Sie, dass  $X^2$  gammaverteilt ist, und identifizieren Sie die Parameter dieser Gammaverteilung.

**Aufgabe 5****(1+2 Punkte)**

Es sei  $P$  die Gleichverteilung über der Einheitskreislinie  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ .

- a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der 1. Randverteilung  $Q$  von  $P$ .
- b) Zeigen Sie, dass  $Q$  eine Dichte bezüglich des Lebesguemaßes besitzt, und berechnen Sie eine solche.

**Aufgabe 6****(3\* Punkte)**

Jemand schreibt  $n$  Briefe an verschiedene Leute und beschriftet die  $n$  Couverts dazu. Dann steckt er die Briefe zufällig in die Couverts, ohne auf die Adressen zu achten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt mindestens ein Adressat den für ihn bestimmten Brief? Wie verhält sich diese Wahrscheinlichkeit im Limes  $n \rightarrow \infty$ ?