Blatt Nr. 4 Prof. F. Merkl

Übungen zur Stochastik
WS 2007/08
Abgabe: Montag, den 12.11.2007, bis 12:00 Uhr

Aufgabe 1 **(1 Punkt)**
Was ist wahrscheinlicher: Bei dem Wurf eines fairen Würfels eine "6" zu würfeln, oder bei sechsmaligem Wurf zweier fairer Würfel mindestens eine Doppel-6?

Aufgabe 2 **(3 Punkte)**
Sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\{1,2,3,4\}, \mathcal{P}(\Omega))$, $P = \frac{1}{4}(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4)$ und $Q = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_4)$. Zeigen Sie: Das Mengensystem $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} : \ P(A) = Q(A)\}$ ist weder durchschnittsstabil noch eine σ-Algebra. (Nach einem Satz aus der Vorlesung ist $\mathcal{D}$ jedoch ein Dynkin-System.) Zeigen Sie auch: $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{A}$.

Aufgabe 3 **(1+1 Punkte)**
Es sei P das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ mit der Dichte $f(x) = 2c1_{]0,1/2]\times]0,1]}(x) + c1_{]1/2,1]\times]0,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, bezüglich des 2-dimensionalen Lebesgue-Maßes λ_2 mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Konstante c.

b) Berechnen Sie $P(]0,3/4]\times]0,1/2])$.

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die auftretenden Rechtecke an einer Skizze.

Aufgabe 4 **(1+1+1+1 Punkte)**
Es sei P das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit der Dichte $f(x) = c(1+x)e^{-x}1_{]0,\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, bezüglich des Lebesgue-Maßes mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Konstante c.

b) Skizzieren Sie die Dichte f.

c) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F von P.

d) Berechnen Sie $P(\{2\})$ und $P([1,2])$. Veranschaulichen Sie sich diese Wahrscheinlichkeiten in Ihren Skizzen der Dichte f und der Verteilungsfunktion F.

Bitte wenden

Aufgabe 5 **(2+2 Punkte)**

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Weiter seien P und Q zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit Wahrscheinlichkeitsdichten f_P bzw. f_Q bezüglich μ. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) P=Q

b) $f_P = f_Q$ μ-fast sicher, d.h. $\{\omega \in \Omega : f_P(\omega) \neq f_Q(\omega)\}$ ist eine μ-Nullmenge.

Aufgabe 6 **(2+1 Punkte)**

a) Es seien μ, ν zwei Maße auf einem Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{A})$. Das Maß ν besitze eine Dichte $f : \Omega \to [0, +\infty]$ bezüglich μ. Zeigen Sie, dass für jede bezüglich $\mathcal{A}$ Borel-meßbare Funktion $g : \Omega \to [0, +\infty]$ gilt:

$$\int_\Omega g \, d\nu = \int_\Omega g \cdot f \, d\mu$$

Hinweis: Zeigen Sie das zunächst im Fall, dass g eine endliche Linearkombination von Indikatorfunktionen ist.

b) Folgern Sie: Sind μ, ν und π drei Maße auf dem Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{A})$ und besitzt ν eine Dichte f bezüglich μ sowie π eine Dichte g bezüglich ν, so ist $g \cdot f$ eine Dichte von π bezüglich μ.