Blatt Nr. 3 Prof. F. Merkl

Übungen zur Stochastik
WS 2007/08
Abgabe: Montag, den 5.11.2007, bis 12:00 Uhr

Aufgabe 1 **(1+1 Punkte)**
Es sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P über $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Beweisen Sie:

a) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $P(]-\infty, x[) = \lim_{y\uparrow x} F(y)$.

Aufgabe 2 **(1+1+1+1 Punkte)**
Ein fairer Spielwürfel wird zweimal geworfen.

a) Finden Sie ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ für dieses Zufallsexperiment mit einem endlichen Ergebnisraum Ω.

b) Geben Sie für $n = 2, 3, \ldots, 12$ die Ereignisse A_n: "Die Augensumme beträgt n" in aufzählender Form an und berechnen Sie $P(A_n)$.

Wir nennen $Q = \sum_{n=2}^{12} P(A_n)\delta_n$ die Verteilung der Augensumme auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

c) Skizzieren Sie die Zähldichte von Q.[1]

d) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von Q.

Aufgabe 3 **(2 Punkte)**
Die 2-dimensionale Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P über $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ wird durch $F(x,y) = P(]-\infty, x]\times]-\infty, y])$ definiert. Beweisen Sie: Sind P, Q zwei Wahrscheinlichkeitsmaße über $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ mit der gleichen 2-dimensionalen Verteilungsfunktion F, so folgt $P = Q$.
Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ von den Rechtecken $]a,b]\times]c,d]$ mit $a < b$ und $c < d$ erzeugt wird.

Bitte wenden

[1] Gemeint ist die Zähldichte der Einschränkung von Q auf $\mathcal{P}(\{2, 3, \ldots, 12\})$.

Aufgabe 4 **(3 Punkte)**

Es sei Ω ein Ergebnisraum und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem. Zeigen Sie: Es gibt ein kleinstes Dynkin-System über Ω, das $\mathcal{M}$ umfaßt, nämlich den Durchschnitt aller Dynkin-Systeme über Ω, die $\mathcal{M}$ umfassen.

Aufgabe 5 **(2*+1 Punkte)**

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ eine weitere σ-Algebra, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$ ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{B}$ und $A \in \mathcal{A}$ ein Ereignis. Es gelte $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ für alle $B \in \mathcal{M}$.

a) Zeigen Sie: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}$.

b) Folgern Sie: Wenn $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, dann gilt $P(A) = 0$ oder $P(A) = 1$.

Aufgabe 6 **(3* Punkte)**

Es sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $(]0,1], \mathcal{B}(]0,1]))$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle Intervalle $I =]a,b] \subseteq]0,1]$, $0 \leq a < b \leq 1$, gelte: Sind $L =]a,m]$ und $R =]m,b]$ die linke bzw. rechte Hälfte von I, wobei $m = (a+b)/2$ die Mitte von I bezeichnet, so gilt $P(L) = P(R)$. Zeigen Sie: P ist die Gleichverteilung über $(]0,1], \mathcal{B}(]0,1]))$.