

Übungen zur Stochastik
WS 2007/08

Abgabe: Montag, den 29.10.2007, bis 12:00 Uhr

Aufgabe 1**(1+1+1 Punkte)**

In einer Urne befinden sich n Kugeln, davon k weiße Kugeln und $n - k$ schwarze Kugeln. Es werden zufällig m Kugeln *ohne* Zurücklegen gezogen.

- Modellieren Sie dieses Zufallsexperiment durch einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit einer diskreten Gleichverteilung P .
- Gegeben $l \in \{0, 1, \dots, m\}$, identifizieren Sie das Ereignis A_l : "Unter den m gezogenen Kugeln sind genau l weiße Kugeln."
- Berechnen Sie $P(A_l)$.

Aufgabe 2**(1+1+1 Punkte)**

Wiederholen Sie die vorhergehende Aufgabe, wenn jetzt die Kugeln *mit* Zurücklegen gezogen werden.

Aufgabe 3**(1+(2+2*) Punkte)**

Es sei Ω ein Ergebnisraum.

- Zeigen Sie: Ist $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, so folgt $\sigma(\mathcal{M}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{M}_2)$.
- Zeigen Sie: Die Borelsche σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\]a, b[: a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ wird von jedem der beiden folgenden Mengensysteme erzeugt:
 - $\mathcal{M} := \{] - \infty, a] : a \in \mathbb{Q} \}$,
 - $\mathcal{N} := \{ A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ ist offen} \}$.

Aufgabe 4**(2* Punkte)**

Zeigen Sie: Die Borelsche σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ wird von keiner Partition von \mathbb{R} erzeugt.

Bitte wenden

Aufgabe 5**(1+3 Punkte)**

Es seien (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \in \mathcal{A}$ drei Ereignisse.

Zeigen Sie:

a)

$$P(A \setminus B) - P(B \setminus A) = P(A) - P(B)$$

b)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

Aufgabe 6**(1+2+2*+2*+2* Punkte)**

Es sei $\omega \in [0, 1[$ eine nach der Gleichverteilung P auf $([0, 1[, \mathcal{B}([0, 1[))$ gezogene Zufallszahl.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

a) $\omega = 1/\sqrt{2}$

b) Die ersten 10 Nachkommaziffern in der Dezimaldarstellung von ω stimmen mit denen von $1/\sqrt{2}$ überein.

c) Unter den ersten 100 Nachkommaziffern in der Dezimaldarstellung von ω stimmen genau die 3., 7., 19., 32., 38., 45., 61., 77., 83. und 99. mit denen von $1/\sqrt{2}$ überein.

d) Unter den ersten 100 Nachkommaziffern in der Dezimaldarstellung von ω gibt es genau 10, die mit denen von $1/\sqrt{2}$ übereinstimmen.

e) Unter allen Nachkommaziffern der Dezimaldarstellung von ω gibt es genau 10, die mit denen von $1/\sqrt{2}$ übereinstimmen.