

Übungen zur Stochastik
WS 2007/08

Abgabe: Montag, den 4.2.2008, bis 12:30 Uhr

Aufgabe 1 **(2+2+2 Punkte)**

Ein Beispiel zum Neyman–Pearson–Lemma. In einer schriftlichen Prüfung, an der sehr viele Kandidaten teilnahmen, gab es drei multiple-choice-Aufgaben. Aufgabe Nr. n wurde von folgendem Anteil p_n der Kandidaten richtig beantwortet:

n	1	2	3
p_n	10%	20%	40%

Wir wollen testen, ob der Kandidat Fritz signifikant besser (z. B. “doppelt so gut”) war. Dazu machen wir die Modellannahme, dass Fritz eine (unbekannte) Wahrscheinlichkeit q_n hatte, die Aufgabe Nr. n richtig zu beantworten, unabhängig für die verschiedenen Aufgaben.

Nullhypothese: $q_n = p_n$ für $n = 1, 2, 3$.

Alternativhypothese: $q_n = 2p_n$ für $n = 1, 2, 3$.

- a) Konstruieren Sie hierzu einen randomisierten Test zum 10%–Niveau mit maximaler Macht, der als Eingabedaten verwenden soll, *welche* Aufgaben Fritz richtig beantwortete. Welche Macht hat dieser Test?
- b) Konstruieren Sie einen weiteren randomisierten Test zum 10%–Niveau mit maximaler Macht, der aber nur verwenden darf, *wie viele* Aufgaben Fritz richtig beantwortete. Berechnen Sie auch die Macht dieses Tests. Vergleichen Sie die Macht der beiden Tests.
- c) Fritz hat genau die ersten beiden Aufgaben richtig beantwortet. Wie lautet das Ergebnis der beiden Tests? Interpretieren Sie die Resultate!

Aufgabe 2 **(2+2 Punkte)**

Vergleich zweier Schätzmethoden. Während der Vorbereitungszeit auf die mündliche Prüfung kommunizieren Arno und Benno per e-mail, um auftretende Probleme zu bereinigen. Aufgrund der Tageszeiten zu denen Benno Meldungen abschickt, hat Arno den Verdacht, dass Benno mehr arbeitet als er. Aus den Tageszeiten der letzten zehn Meldungen (umgerechnet in Stunden)

10.55, 14.9, 11.2, 18.85, 9.75, 11.5, 16.1, 14.4, 9.2, 12.95

will Arno Bennos Arbeitszeiten schätzen. Zu diesem Zweck nimmt er an, dass Benno jeden Tag zur Zeit a anfängt zu lernen und zur Zeit b aufhört, und dass die Zeiten, zu denen die e-mails abgeschickt werden, unabhängig und alle gleichverteilt sind auf dem Intervall $[a, b]$. Schätzen Sie die Parameter a und b mit

- a) der Maximum-Likelihood-Methode
- b) der Momenten-Methode, d.h. finden Sie die Parameter a und b , für die Erwartungswert = empirisches Mittel $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$ und Varianz = Stichprobenvarianz $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2$ gilt.

Sind diese Schätzungen vernünftig?

Bitte wenden.

Aufgabe 3**(2+2+2 Punkte)**

Arnos Prüfung. Während Benno auf die mündliche Prüfung in Stochastik wartet, fragt er sich, mit welcher Wahrscheinlichkeit p bei solchen Prüfungen Fragen zum Neyman–Pearson–Lemma gestellt werden. Soeben kommt Arno von der Prüfung; er erzählt, dass er über dieses Lemma befragt wurde.

- a) Bilden Sie ein möglichst einfaches formales Modell, mit dem sich die beiden folgenden Teilaufgaben bearbeiten lassen.
- b) Geben Sie aufgrund Arnos Bericht eine Maximum-Likelihood-Schätzung für p an.
- c) Geben Sie ein 95%-Konfidenzintervall für p an.

Aufgabe 4**(2+2+2+1+2+2+1 Punkte)**

Kunden im Postamt. In einem Postamt kommen zu zufälligen Zeiten Kunden an, und zwar der i -te Kunde zur Zeit T_i , $i = 1, 2, \dots$. Wir setzen noch $T_0 = 0$. Wir nehmen an, dass die Zeiten $T_i - T_{i-1}$ zwischen den Ankünften iid und exponentialverteilt mit unbekanntem Parameter sind. Wir beobachten die Ankunftszeiten T_1, \dots, T_{10} der ersten 10 Kunden.

Hinweis: Benutzen Sie im folgenden für Zwischenrechnungen einen Computer, wenn Sie es für sinnvoll halten.

- a) Bilden Sie ein statistisches Modell für diese Situation.
- b) Zeigen Sie: T_{10} ist eine suffiziente Statistik.
- c) Gegeben $0 < \mu_0 < \mu_1$, entwickeln Sie einen Test über das unbekannt vorliegende Wahrscheinlichkeitsmaß P für die Nullhypothese $E_P[T_1] = \mu_0$ zur Alternative $E_P[T_1] = \mu_1$ mit möglichst großer Macht bei vorgegebenem Signifikanzniveau α .
- d) Hängt der Test von der Wahl von μ_1 ab, wenn $0 < \mu_0 < \mu_1$ garantiert ist?
- e) Gegeben die Beobachtung $T_{10} = 10$ Minuten, wie groß ist der p-Wert für $\mu_0 = 5$ Minuten? Wie lautet der Testentscheid auf dem 5% Niveau?
- f) Berechnen Sie ein möglichst kleines 95%-Konfidenzintervall der Gestalt $]0, a(T_{10})]$ für den unbekanntem Erwartungswert $E_P[T_1]$.
- g) Gegeben die Beobachtung $T_{10} = 10$ Minuten von oben, liegt $\mu_0 = 5$ Minuten in diesem Konfidenzintervall? *Hinweis:* Nicht rechnen, sondern nachdenken!