Übungen zur Stochastik
WS 2007/08
Abgabe: Montag, den 21.1.2008, bis 12:30 Uhr

Aufgabe 1 **(keine Abgabe)**
Schreiben Sie eine Zusammenfassung der wichtigsten Vorlesungsinhalte auf maximal 5 DIN A4 Blättern (Vorder- und Rückseite, also 10 Seiten).
Hinweis: Sie dürfen diese Zusammenfassung bei den Klausuren verwenden.

Aufgabe 2 **(2 Punkte)**
In der angewandten Statistik gibt es die "Daumenregel", daß für viele Arten von Meßgrößen ca. 5% der Meßergebnisse mehr als zwei Standardabweichungen von dem Erwartungswert abweichen. Geben Sie eine theoretische Begründung für diese Daumenregel.

Aufgabe 3 **(2+1 Punkte)**
Es sei $0 < p < 1$ gegeben. Weiter sei X_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge binomialverteilten Zufallsvariablen mit den Parametern n und p.

a) Berechnen Sie für $m, k \in \mathbb{N}$ mit $k < m$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nm} \log P[X_{nm} = nk].$$

Hinweis: Verwenden Sie Ideen aus dem Beweis des Satzes von de Moivre-Laplace.

b) Vergleichen Sie das Ergebnis aus a) im Fall $k/m > p$ mit der oberen Schranke für

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{nm} \log P[X_{nm} \geq nk],$$

die aus der exponentiellen Tschebyscheff-Ungleichung folgt.

Aufgabe 4 **(2+1 Punkte)**
Eine unfaire Münze mit unbekannter Wahrscheinlichkeit p für "Kopf" wird solange geworfen, bis zum 10. Mal "Kopf" erscheint. Man beobachtet Anzahl der Würfe.

a) Geben Sie ein statistisches Modell $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ an, das dieses Experiment beschreibt.

b) Berechnen Sie für $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ den Likelihood-Quotienten dP_2/dP_1, also die Dichte von P_2 bezüglich P_1.

Bitte wenden.

Aufgabe 5 **(2+2 Punkte)**
Eine Illustration zum zentralen Grenzwertsatz. Die Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien iid exponentialverteilt mit Parameter 1. Wir setzen

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{und} \quad Z_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S_n]}}.$$

a) Bestimmen Sie die Dichten f_{S_n} bzw. f_{Z_n} von S_n bzw. Z_n, $n \in \mathbb{N}$ explizit und stellen Sie diese (am besten mit Hilfe eines Computers) für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ graphisch dar. (Plotten Sie zwei Diagramme, eines für die f_{S_n} und eines für die f_{Z_n}.) Stellen Sie im zweiten Diagramm auch die Dichte der Standardnormalverteilung dar.

b) Zeigen Sie, dass die f_{Z_n} für $n \to \infty$ fast überall (d. h. bis auf einer Lebesgue-Nullmenge) gegen die Dichte der Standardnormalverteilung konvergieren.
Hinweis: Taylorentwickeln Sie $\ln f_{Z_n}$ um 0 bis zur zweiten Ordnung.

Aufgabe 6 **(2^*+2^*+2^*+2^* Punkte)**
Die Methode der kleinsten Quadrate. Ein Arzt vermutet, dass zwischen der Herzfrequenz f und dem Herzzeitvolumen (= pro Zeiteinheit transportiertes Blutvolumen) V bei einem Patienten ein affin-linearer Zusammenhang $V = \alpha f + \beta$ besteht. Ihm liegen $n > 1$ Meßdaten $\vec{V} = (V_i)_{i=1,\dots,n}$ bei verschiedenen Herzfrequenzen $\vec{f} = (f_i)_{i=1,\dots,n}$ vor, wobei die Herzfrequenz sehr genau gemessen werden kann, das Herzzeitvolumen jedoch aus methodischen Gründen nur ungenau mit zufälligen Fehlern $\vec{\epsilon} = (\epsilon_i)_{i=1,\dots,n}$:

$$\vec{V} = \alpha\vec{f} + \beta\vec{1} + \vec{\epsilon}\,,$$

wobei $\vec{1} := (1)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n$. Wir setzen an, dass die ϵ_i iid normalverteilt sind mit Erwartungswert 0 (kein systematischer Fehler) und Varianz σ^2. Es sei $\hat{\alpha}\vec{f} + \hat{\beta}\vec{1}$ die orthogonale Projektion (bezüglich des Standardskalarprodukts) von $\vec{V}$ auf den zweidimensionalen Unterraum $U = \mathrm{span}\{\vec{f}, \vec{1}\}$ von $\mathbb{R}^n$. $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ sind also diejenigen (zufälligen) Werte, für die die folgende Quadratsumme Q minimal wird:

$$Q = \left\|\hat{\alpha}\vec{f} + \hat{\beta}\vec{1} - \vec{V}\right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (\hat{\alpha} f_i + \hat{\beta} - V_i)^2$$

a) Zeigen Sie, dass $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ zweidimensional normalverteilt und unabhängig von den Abweichungen $\hat{\alpha}\vec{f} + \hat{\beta}\vec{1} - \vec{V}$ ist.

b) Zeigen Sie: $\frac{Q}{\sigma^2}$ ist χ^2–verteilt mit $n - 2$ Freiheitsgraden.

c) Zeigen Sie $E[\hat{\alpha}] = \alpha$ und $E[\hat{\beta}] = \beta$.

d) Berechnen Sie $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ in Abhängigkeit von den Meßdaten $\vec{f}$ und $\vec{V}$.