Blatt Nr. 11 Prof. F. Merkl

Übungen zur Stochastik
WS 2007/08
Abgabe: Montag, den 14.1.2008, bis 12:30 Uhr

Aufgabe 1 **(2+2 Punkte)**
Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert nicht fast sichere Konvergenz. Es seien $N_k : \Omega \to A_k$, $k \in \mathbb{N}$, unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, gleichverteilt auf A_k, wobei $A_k := \{n \in \mathbb{N} : 2^k \leq n < 2^{k+1}\}$. Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n := \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{N_k = n\}}.$$

Zeigen Sie:

a) $X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in Wahrscheinlichkeit.

b) X_n konvergiert für $n \to \infty$ *nicht* P-fast sicher gegen 0.

Aufgabe 2 **(2+2+2* Punkte)**
Quadratische versus exponentielle Tschebyscheff-Ungleichung. Für $\mu > 0$ sei X_μ eine poissonverteilte Zufallsvariable mit dem Parameter μ über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Finden Sie mit Hilfe der *quadratischen* Tschebyscheff-Ungleichung eine möglichst kleine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit $q := P[|X_\mu - \mu| \geq \mu/2]$. Berechnen Sie diese Schranke für $\mu = 1000$ numerisch auf einige Dezimalstellen genau.

a) Finden Sie mit Hilfe der *exponentiellen* Tschebyscheff-Ungleichung eine möglichst kleine obere Schranke für die gleiche Wahrscheinlichkeit q. Berechnen Sie auch diese Schranke für $\mu = 1000$ numerisch auf einige Dezimalstellen genau.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit q mit Hilfe eines Computers direkt numerisch auf einige Dezimalstellen genau.

Vergleichen Sie die numerischen Ergebnisse!
Hinweis: Es ist günstig, Gleitkommazahlen zu verwenden, weil q sehr klein ist.

Aufgabe 3 **(2+2 Punkte)**
Ein Glücksspiel. Arno und Benno spielen folgendes Spiel: Jeder wählt anfänglich eine Sequenz (x, y), $x, y \in \{0, 1\}$. Danach wird mit einer fairen Münze eine 0-1 Folge erzeugt und jedesmal, wenn die Sequenz eines Spielers auftaucht, bekommt er vom Gegenspieler einen Euro.

a) Zeigen Sie: Wenn die Münze n mal geworfen wird, so hängt die erwartete Anzahl Arnos Treffer nicht von der Sequenz ab, die er gewählt hat.

b) Arno wählt also die erste Sequenz, die ihm einfällt, nämlich (0,0), worauf Benno sich für die Sequenz (1,0) entschließt. Sie vereinbaren nun solange zu spielen, bis zweimal eine Zahlung stattfindet. Wie groß ist Arnos erwarteter Gewinn?

Bitte wenden.

Aufgabe 4 **(2+2 Punkte)**

Ein Grenzwertsatz für die Multinomialverteilung. Es seien X_i, $i \in \mathbb{N}$, iid Zufallsvariablen mit Werten in $\{1,2,3\}$ mit $p_k := P[X_i = k] > 0$ für $k = 1,2,3$. Wir setzen

$$N_{k,n} := \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i = k\}}$$

für $n \in \mathbb{N}$, $k = 1,2,3$. Weiter seien $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_0$ und $n = n_1 + n_2 + n_3$ gegebene Zahlen.

a) Berechnen Sie $P[N_{1,n} = n_1, N_{2,n} = n_2, N_{3,n} = n_3]$.

b) Nehmen Sie nun noch an, dass $p_k n = n_k$ für $k = 1,2,3$ gilt. Zeigen Sie, dass $mP[N_{1,mn} = mn_1, N_{2,mn} = mn_2, N_{3,mn} = mn_3]$ für $m \to \infty$ konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.
Hinweis: Verwenden Sie die Stirlingformel: $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}} = 1$

Aufgabe 5 **(2+2+2 Punkte)**

Warteschlangen. Wir betrachten das folgende Modell einer Warteschlange in diskreter Zeit $t = 0,1,2,\ldots$. In jedem Zeitschritt wird der vorderste Kunde mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ fertig bedient und verlässt das System. Unabhängig davon kommt ein neuer Kunde mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ an, der sich hinten in die Schlange stellt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich ein Kunde im System. Die Vorgeschichte spielt dabei keine Rolle. Wir bezeichnen mit X_t die Anzahl Kunden im System zum Zeitpunkt t.

a) Formalisieren Sie die durch den obigen Text an die Zufallsvariablen X_t gestellten Bedingungen, d.h. geben Sie *formal* an, welche Eigenschaften die X_t und das zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsmaß P erfüllen sollen.

b) Gegeben sei ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, auf dem eine iid Folge 0-1-wertiger Zufallsvariablen Z_i mit $P[Z_i = 0] = \frac{1}{2}$ definiert sei. Konstruieren Sie aus den Z_i Zufallsvariablen X_t auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit den in a) angegebenen Eigenschaften.

c) Zeigen Sie, dass die in b) konstruierten X_t die in a) angegebenen Bedingungen wirklich erfüllen.

Aufgabe 6 **(2^*+2^*+2^* Punkte)**

Singulärstetige Maße auf dem Einheitsintervall. Es sei $0 < p < 1$. Weiter seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, iid Zufallsvariablen mit Werten in $\{0,1\}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $P[X_n = 1] = p$. Wir setzen

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n, \quad Z : (\Omega, \mathcal{A}) \to ([0,1], \mathcal{B}([0,1])).$$

Es bezeichne $\mu_p := \mathcal{L}_P(Z)$ die Verteilung von Z. Insbesondere ist $\mu_{1/2}$ die Gleichverteilung auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$. Zeigen Sie:

a) Die Verteilungsfunktion von Z ist stetig.

b) Ist $p \neq 1/2$, so gibt es ein $M \in \mathcal{B}([0,1]))$ mit $\mu_{1/2}(M) = 0$ und $\mu_p(M) = 1$. Man sagt hierzu: $\mu_{1/2}$ und μ_p sind *orthogonal zueinander*.
Hinweis: Verwenden Sie das Starke Gesetz der großen Zahlen.

c) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von Z im Fall $p = 1/3$ von Hand, oder plotten Sie diese mit einem Computer.