Blatt Nr. 10 Prof. F. Merkl

Übungen zur Stochastik

WS 2007/08

Abgabe: Montag, den 7.1.2008, bis 12:30 Uhr

Aufgabe 1 **(1 Punkt)**

Eine nützliche Formel für die Covarianz. Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit endlicher Varianz. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Aufgabe 2 **(2+2+1+2+1+2 Punkte)**

Erwartungswert und Varianz einiger Standardverteilungen. Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von Zufallsvariablen mit den folgenden Verteilungen:

a) der Poissonverteilung zum Parameter $\lambda > 0$,

b) der geometrischen Verteilung zum Parameter $p \in]0, 1[$,

c) der negativen Binomialverteilung zu den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in]0, 1[$,

d) der Gammaverteilung zu den Parametern $a, s > 0$,

e) der χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden,

f) der Betaverteilung zu den Parametern $a, b > 0$.

Aufgabe 3 **(2 Punkte)**

Entenjagd. k Jäger schiessen gleichzeitig je einmal auf einen Schwarm aus m Enten. Sie suchen sich unabhängig voneinander die Ente aus, auf die sie zielen, und treffen diese unabhängig voneinander und unabhängig von der Wahl der Ente mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$. Geben Sie ein Wahrscheilichkeitsmodell an, das die Situation beschreibt. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl unverletzter Enten.

Bitte wenden.

Aufgabe 4 **(2 Punkte)**
Simulation durch Ausdünnung: vollständige Modellierung. Es sei f eine beschränkte Wahrscheinlichkeitsdichte auf $[0,1]$ mit oberer Schranke $f \leq M \in \mathbb{R}$. Es sei $U_n = (X_n, Y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, eine iid Folge von Zufallsvektoren über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $R := [0,1] \times [0, M]$, gleichverteilt in R. Weiter sei $T = \inf\{n \in \mathbb{N} : \ Y_n \leq f(X_n)\}$. Zeigen Sie: P-fast sicher ist $T < \infty$, und die Zufallsvariable $X_T : \Omega \to [0,1]$, $X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ besitzt die Dichte f, wobei wir noch formal $X_\infty := 0$ setzen.

Aufgabe 5 **(2+2+1 Punkte)**
Erwartungswertvektor und Covarianzmatrix multidimensionaler Normalverteilungen. Es seien $b = (b_i)_{i=1\ldots,n} \in \mathbb{R}^n$ und $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Weiter sei $(X_1, \ldots, X_n)$ ein normalverteilter Zufallsvektor: $\mathcal{L}_P(X_1, \ldots, X_n) = \mathrm{N}(b, A)$. Zeigen Sie:

a) $E_P[X_i] = b_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

b) $\mathrm{Cov}_P(X_i, X_j) = a_{ij}$ für $i, j = 1, \ldots, n$.

c) $\mathcal{L}_P(X_i) = \mathrm{N}(b_i, a_{ii})$ für $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 6 **(3* Punkte)**
Die Gleichverteilung auf hochdimensionalen Kugeln. Für jedes sei $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n = (X_{1,n}, \ldots, X_{n,n})$ ein auf dem Einheitsball $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\|_2 = 1\}$ gleichverteilter Zufallsvektor. Zeigen Sie: Die Verteilungsfunktion von $\sqrt{n}X_{1,n}$ konvergiert für $n \to \infty$ punktweise gegen die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.