Blatt Nr. 1 Prof. F. Merkl

Übungen zur Stochastik
WS 2007/08
Abgabe: Montag, den 22.10.2007, bis 12:00 Uhr

Aufgabe 1 **(je 2 Punkte)**
Modellieren Sie folgende Experimente durch geeignete Ergebnisräume Ω. Geben Sie Ihre Interpretationen für die Ergebnisse $\omega \in \Omega$ an:

a) n ununterscheidbare Tischtennisbälle werden auf m unterscheidbare Schachteln verteilt, wobei nicht alle Schachteln gleich viele Kugeln enthalten brauchen und manche Schachteln leer bleiben dürfen.

b) Es wird ein Würfel einmal geworfen und anschließend ein zweiter Würfel so oft, wie der erste Augen zeigt.

c) Eine unbekannte, aber endliche Anzahl unterscheidbarer Punktteilchen wird im Raum $\mathbb{R}^3$ verteilt. Wie ändert sich Ihr Modell, wenn die Teilchen ununterscheidbar sind?

Aufgabe 2 **(3× 1 Punkt)**
Es seien $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $A, B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie: $A \cap B \in \mathcal{A}$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$, $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 3 **(je 1 Punkt)**
Der Ergebnisraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ modelliere die Augenzahl des Wurfs eines Würfels. Geben Sie jeweils diejenige Partition von Ω an, die die gleiche σ-Algebra erzeugt wie die folgenden Ereignisse. Hier wird kein Beweis verlangt.

a) "Augenzahl ungerade" und "Augenzahl durch 3 teilbar"

b) "Augenzahl gerade" und "Augenzahl > 3"

c) "Augenzahl gerade", "Augenzahl > 3" und "Augenzahl 1 oder 6"

Aufgabe 4 **(3 Punkte)**
Seien Ω ein Ergebnisraum und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Zeigen Sie: Das Mengensystem

$$\sigma(\mathcal{M}) := \{A \subseteq \Omega : \ \text{Für alle } \sigma\text{-Algebren } \mathcal{A} \text{ über } \Omega \text{ mit } \mathcal{A} \supseteq \mathcal{M} \text{ gilt } A \in \mathcal{A}\}$$

ist eine σ-Algebra, die $\mathcal{M}$ umfaßt.

bitte wenden

Aufgabe 5 **(je 2 Punkte)**

Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Ereignisraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Mengen. Zeigen Sie:

a) "A_n tritt für große n schliesslich ein", also $\{\omega \in \Omega : \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0\, \omega \in A_n\}$ ist meßbar.

b) "A_n tritt für unendlich viele n ein", also $\{\omega \in \Omega :\ \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}$ ist meßbar.

Aufgabe 6 **(1+1+1+1+2* Punkte)**

Zeigen Sie, dass folgende Mengen Borel-meßbar sind:

a) $[a, b]$, wobei $a \leq b \in \mathbb{R}$,

b) $]a, b]$ und $[a, b[$, wobei $a < b \in \mathbb{R}$,

c) jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$,

d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

e) $\{x \in [0, 1[\text{: die Dezimaldarstellung von } x \text{ enthält unendlich oft die Ziffer 3, aber niemals die Ziffer 7}\}$