Einige Übungsaufgaben zur Prüfungsvorbereitung

1. Gegeben sind das Vektorfeld $V(x,y) = (x^2 - y^2, xy)$ und die 2-Form $\omega(x,y) = x\,dx \wedge dy$ über $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_V\omega$.

2. Es sei $-1 < r < 1$. Berechnen Sie die Oberfläche des Sphärensektors
$$K_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > r\}$$

3. Gegeben ist die 2-Form
$$\omega(x,y,z) = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx - 2z\,dx \wedge dy$$
über $\mathbb{R}^3$.
   (a) Zeigen Sie: $d\omega = 0$.
   (b) Finden Sie ein $\sigma \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^3)$ mit $d\sigma = \omega$.

4. Berechnen Sie den Fluß $\Phi(V,E)$ des Vektorfelds $V(x,y,z) = (x, y, -z + x)$ durch die Ellipsoidfläche $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ mit einer Orientierung Ihrer Wahl
   (a) direkt, ohne den Satz von Gauß anzuwenden,
   (b) mit Hilfe des Satzes von Gauß.

5. Berechnen Sie mit den Bezeichnungen der vorhergehenden Aufgabe den Fluß $\Phi(\operatorname{rot} V, E)$
   (a) direkt, ohne den Satz von Stokes anzuwenden,
   (b) mit Hilfe des Satzes von Stokes.

6. Zeigen Sie: Jede geschlossene glatte p-Form über dem Gebiet
$$U = \mathbb{R}^n \setminus \{(x, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$$
ist exakt.

7. Sei $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $f : U \to U,\ f(x) = x/\|x\|_2$. Zeigen Sie:
$f^* : H^2(U) \to H^2(U)$ ist nicht die Nullabbildung.