

Übungsblatt 7

(Besprechung am 13.12.2004, 16:15-17:00, Raum 251)

In diesem Blatt soll schon die multidimensionale Itô-Formel verwendet werden:

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$ ein Vektor von Semimartingalen mit Werten in U und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$df(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) dX^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) d\langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle$$

1. Lösen Sie Aufgabe 1 des Übungsblatts 2 noch einmal, diesmal mit Hilfe der Itô-Formel:
Es sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine standard Brownsche Bewegung und $X_t = e^{aB_t + bt}$, $t \geq 0$; $a, b \in \mathbb{R}$. Finden Sie eine Zerlegung $X_t = M_t + A_t$ in ein Martingal M und einen Prozeß A mit endlicher Totalvariation. Schreiben Sie M_t als ein stochastisches Integral.
2. Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge mit glattem Rand ∂D . Ferner sei $g : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die stetige und in D zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : D \cup \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ löse das Dirichletproblem

$$\Delta f = 0 \text{ in } D, \quad f|_{\partial D} = g.$$

Sei B_t , $t \geq 0$, eine n -dimensionale Brownsche Bewegung, d.h. die Komponenten von B_t sind unabhängige standard Brownsche Bewegungen. Zeigen Sie, daß

$$f(x) = E(g(x + B_{T_x}))$$

gilt, wobei $T_x := \inf\{t : x + B_t \in \partial D\}$.

3. Es sei B_t , $t \geq 0$ eine dreidimensionale Brownsche Bewegung. Wir betrachten eine Kugelschale $K_{r,R} = \{y \in \mathbb{R}^3 : r \leq |y| \leq R\}$, wobei $0 < r < R$. Es sei $x \in K_{r,R}$ und $T := \inf\{t > 0 : x + B_t \in \partial K_{r,R}\}$. Zeigen Sie: $1/|x + B_{t \wedge T}|$ ist ein Martingal. Berechnen Sie hiermit $P[|B_T| = r]$. Beweisen Sie, daß $x + B_t$ fast sicher nie den Nullpunkt trifft.