

Übungsblatt 2

(Besprechung am 8.11.2004, 16:15-17:00, Raum 251)

1. Es sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine standard Brownsche Bewegung, adaptiert bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist $X_t = e^{aB_t + bt}$, $t \geq 0$, ein Submartingal (bezüglich der gleichen Filtration)? Zeigen Sie, daß in diesem Fall eine Doob-Meyer Zerlegung $X_t = M_t + A_t$ mit

$$A_t = \left(\frac{1}{2}a^2 + b \right) \int_0^t X_s ds$$

besteht.

2. **Die Doob-Meyer Zerlegung im diskreten Fall.** Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Submartingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zeigen Sie: Es gibt eine Zerlegung $X_n = M_n + A_n$ mit folgenden Eigenschaften:

- $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.
- $A_0 = 0$.
- Für P -fast alle $\omega \in \Omega$ ist $(A_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton steigend.
- $(A_{n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist adaptiert bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Zeigen Sie auch, daß A_n P -f.s. eindeutig bestimmt ist.

3. Es sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine standard Brownsche Bewegung. Weiter seien $r > 0$ und $T > 0$. Zeigen Sie: P -f.s. gilt

$$\sum_{k=1}^{2^n} \left| B_{2^{-n}kT} - B_{2^{-n}(k-1)T} \right|^r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a(r, T),$$

wobei $a(r, T) = \infty$ für $r < 2$, $a(r, T) = T$ für $r = 2$ und $a(r, T) = 0$ für $r > 2$.