Übungsblatt 1

(Besprechung am 25.10.2004, 16:15-17:00, Raum 251)

1. Es sei $T > 0$, und $(B_t)_{t\geq 0}$ eine standard Brownsche Bewegung. Ein stochastischer Prozeß $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ heißt *Brownsche Brücke* im Intervall $[0,T]$, wenn er stetige Pfade und die gleichen endlichdimensionalen Randverteilungen wie $(B_t - \frac{t}{T}B_T)_{0\leq t\leq T}$ hat. Bestimmen Sie diese endlichdimensionalen Randverteilungen; insbesondere die Kovarianzmatrizen.

2. Es sei $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ eine standard Brownsche Bewegung über einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, eingeschränkt auf ein Intervall $[0,T]$. Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren eine abgeändertes W-maß Q auf über $(\Omega, \mathcal{F})$ durch seine Radon-Nikodym Ableitung

$$\frac{dQ}{dP} = e^{aB_T - a^2T/2},$$

d.h.

$$Q[A] = \int_A e^{aB_T - a^2T/2}\, dP$$

für alle Ereignisse $A \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie: $(B_t - at)_{0\leq t\leq T}$ ist eine standard Brownsche Bewegung auf dem Intervall $[0,T]$ über dem abgeänderten W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$.

3. Ein stochastischer Prozeß $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ mit stetigen Pfaden heißt Ornstein-Uhlenbeck Prozeß, wenn alle endlichdimensionalen Randverteilungen multidimensionale Normalverteilungen sind mit Erwartungswert 0 und den Kovarianzen

$$\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = e^{-|s-t|}.$$

Skizzieren Sie eine Konstruktion eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses. Sie brauchen nicht alle Details ausführen.