M1A: ANALYSIS FÜR MATHEMATIKER UND WIRTSCHAFTSMATHEMATIKER
UNIVERSITÄT MÜNCHEN – WINTER 2004/05

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Schreiben Sie bitte Ihren Namen in Blockschrift auf jedes Blatt, einschlielich Deckblatt.

Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt (Vor- und Rückseite). Wenn der Platz nicht reicht, stehen Ihnen am Ende der Klausur zwei leere Blätter zur Verfügung. Sollten Sie diese Blätter benötigen, vermerken Sie das bitte bei den betroffenen Aufgaben.

Sie haben 180 Minuten Zeit.

Wenn Sie den Hörsaal verlassen müssen und anschließend die Bearbeitung Ihrer Klausur fortsetzen möchten, wenden Sie sich bitte an die Aufsicht. Diese wird Ihre Aufgabenblätter verwahren und Sie nach draußen begleiten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{k} n^2 2^n = -6 + 2^{k+1}(3 - 2k + k^2).$$

Aufgabe 2 (6 Punkte). Zeigen Sie:

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}t + o(t) \quad \text{für } t \to 0.$$

Aufgabe 3 (6=2+4 Punkte)**.** (a) Definieren Sie für eine Funktion $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ und $x > 0$ die Aussage

„g ist stetig in x “.

(b) Zeigen Sie *direkt unter Verwendung dieser Definition*, d.h. mit einem ϵ-δ-Argument, dass

$$g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

stetig ist in $x = 1$.

Aufgabe 4 ($6 = 2 + 4$ Punkte)**.** (a) Definieren Sie für eine Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ und eine komplexe Zahl z die Aussage

„z ist ein Berührpunkt von M “.

(b) Beweisen Sie: Die imaginäre Einheit i ist ein Berührpunkt der Menge

$$M = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w > 0\}.$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)**.** Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_1^x \frac{t}{t^2 - 2t + 2} dt.$$

Aufgabe 6 (8=2+4+2 Punkte)**.** (a) Formulieren Sie eine Version des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \dfrac{1}{e^t + 1}$. Zeigen Sie:

$$|f(s) - f(t)| \leq \frac{1}{2}|s - t|, \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$

(c) Beweisen sie mit einem ϵ-δ-Argument, dass f gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 7 (6=2+4 Punkte)**.** (a) Formulieren Sie die Taylorformel mit zwei verschiedenen Darstellungen des Restgliedes.

(b) ($*$) Finden Sie die Taylorentwicklung von

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

an der Stelle 0 bis zur 2. Ordnung, d.h. mit einem Restglied $R(x) = o(x^2)$, $x \to 0$. Zeigen Sie: Für alle $x \geq 0$ erfüllt dieses Restglied die Abschätzung

$$-\frac{5x^3}{16} \leq R(x) \leq 0.$$

Aufgabe 8 (6=2+4 Punkte)**.** (a) Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$. Definieren Sie die Aussage

„z ist ein Häufungspunkt von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ “.

(b) ($*$) Zeigen Sie *direkt mit Hilfe dieser Definition*: Die imaginäre Einheit i ist ein Häufungspunkt der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$c_n = \frac{ni^n}{1+n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$