LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 9 – Hausaufgaben

H9.1 **Leseaufgabe.** Lesen Sie den Abschnitt 2.1 zur Visualisierung von Funktionen mehrerer Variablen im Skript.

H9.2 **Stetige Funktionen auf kompakten Mengen sind gleichmäßig stetig.** Es seien (M, d_M) ein kompakter halbmetrischer Raum, (N, d_N) ein halbmetrischer Raum und $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ eine stetige Abbildung. Beweisen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist. Lassen Sie sich dazu von dem aus der Analysis 1 bekannten Spezialfall $M, N \subseteq \mathbb{R}$ inspirieren.

H9.3 **Vererbung der Totalbeschränktheit und Kompaktheit auf kartesische Produkte.** Es seien (M_i, d_i), $i = 1, \dots, n$ totalbeschränkte halbmetrische Räume und (M, d) das kartesische Produkt davon, versehen mit der Produkthalbmetrik. Zeigen Sie, dass auch (M, d) totalbeschränkt ist. Folgern Sie, dass (M, d) kompakt ist, wenn alle (M_i, d_i) kompakt sind.

H9.4 **Zwei Illustrationen zum Satz von Stone-Weierstraß.** Es sei $B := \{z \in \mathbb{C}|\ |z| \le 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe.

(a) Es sei $\mathbb{C}[z, \overline{z}]$ die Menge der Polynomfunktionen $p : B \to \mathbb{C}$ in der Variablen z und ihrer komplex Konjugierten $\overline{z}$, also Funktionen der Gestalt

$$p(z) = \sum_{k,l \in \mathbb{N}_0} \alpha_{k,l} z^k \overline{z}^l$$

mit komplexen Zahlen $\alpha_{k,l}$, von denen nur endlich viele von 0 verschieden sind. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}[z, \overline{z}]$ dicht in $(C(B, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ ist.

(b) Nun sei $\mathbb{C}[z]$ die Menge der Polynomfunktionen $p : B \to \mathbb{C}$ in z, also

$$p(z) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k z^k$$

mit komplexen Zahlen α_k und $m \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}[z]$ *nicht* dicht in $(C(B, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass

$$L : (C(B, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{C}, |\cdot|), \quad L(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{ix})\, dx - f(0)$$

eine stetige Linearform ist, die auf $\mathbb{C}[z]$ konstant 0 ist, die aber einen Wert $L(z \mapsto z\overline{z}) = 1$ besitzt.

H9.5 **Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty n^{-4}$.** Beweisen Sie analog zur Berechnung der Reihe $\sum_{n=1}^\infty n^{-2}$ im Skript die Formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

indem Sie beide Seiten der Parseval-Gleichung für die "Dreiecksfunktion" $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = x$ für $0 \le x \le \pi$ und $f(x) = 2\pi - x$ für $\pi \le x \le 2\pi$ ausrechnen.

H9.6 **Gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe stetig differenzierbarer periodischer Funktionen.** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion. Zeigen Sie, dass die Fourier-Partialsumme

$$g_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ikx}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$ und

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)\, dx$$

für $n \to \infty$ *gleichmäßig* gegen f konvergiert.
Hinweis: Integrieren Sie partiell und verwenden Sie die Besselsche Ungleichung für f' und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, um $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_k| < \infty$ zu zeigen.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 27.6.2017, 10:15 Uhr.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 9 – Tutorien

T9.1 **Abgeschlossenheit in kompakten Hausdorffräumen.** Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter Hausdorffraum und $K \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Menge K genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen ist. *Hinweis zur Richtung "$\Rightarrow$":* Gegeben $x \in X \setminus K$, wählen Sie für jedes $y \in K$ offene Umgebungen U_y von y und V_y von x mit $U_y \cap V_y = \emptyset$ aus. Betrachten Sie die offene Überdeckung $(U_y)_{y \in K}$ von K und verwenden Sie die Kompaktheit von K.

T9.2 **Satz von Stone-Weierstraß – komplexe Version.** Gegeben seien ein nichtleerer kompakter Hausdorffraum $(X, \mathcal{T})$ und eine Menge $A \subseteq C(X, \mathbb{C})$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Die konstante Funktion $1 : X \to \mathbb{R}$ mit dem Wert 1 ist ein Element von A.

(b) Für alle $f, g \in A$ ist $f + g \in A$.

(c) Für alle $f \in A$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$ ist $\alpha f \in A$.

(d) Für alle $f, g \in A$ ist $f \cdot g \in A$.

(e) Für alle $f \in A$ ist $\overline{f} \in A$, wobei $\overline{f}$ das konjugiert Komplexe von f bezeichnet.

(f) A ist punktetrennend.

Zeigen Sie, dass dann A dicht in $(C(X, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\operatorname{Re} A = \{\operatorname{Re} f |\ f \in A\}$ die Voraussetzungen der reellen Version des Satzes von Stone-Weierstraß erfüllt, und dass $\{\operatorname{Re} f |\ f \in A\} = \{\operatorname{Im} f |\ f \in A\}$ gilt. Erinnern Sie sich dazu an $\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ und $\operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \overline{f})$.

T9.3 **Fourierzerlegung von $\cos^n$ und $\sin^n$.** Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten der Funktionen $f_n, g_n : S^1 \to \mathbb{C}$, $f_n(z) = (\operatorname{Re} z)^n$ und $g_n(z) = (\operatorname{Im} z)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

T9.4 **Beziehung zwischen Funktionen auf S^1 und periodischen Funktionen.** Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt a-periodisch, $a \in \mathbb{R}$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x + a) = f(x)$. Es bezeichne

$$C_{\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} |\ f \text{ ist stetig und } 2\pi\text{-periodisch}\}$$

den Raum aller stetigen, 2π-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass die Abbildung $\iota : (C(S^1, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty) \to (C_{\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$, $\iota(f)(x) = f(e^{ix})$ für $f \in C(S^1, \mathbb{C})$ und $x \in \mathbb{R}$ eine bijektive lineare Isometrie ist. Folgern Sie, dass der von den Funktionen $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, aufgespannte $\mathbb{C}$-Vektorraum dicht in $(C_{\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ ist.