**LMU München** **Prof. F. Merkl**
**Mathematisches Institut**
**Sommersemester 2017**

# Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
# Blatt 8 – Hausaufgaben

H8.1 **Totalbeschränktheit impliziert Beschränktheit.** Zeigen Sie, dass jede totalbeschränkte Menge in einem halbmetrischen Raum auch beschränkt ist.

H8.2 **Eine kompakte Menge in einem Funktionenraum.** Es sei

$$M = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) |\ \|f\|_\infty \leq 1, \forall x, y \in [0,1] :\ |f(x) - f(y)| \leq |x - y|\}$$

der Raum aller durch 1 beschränkten, global Lipschitz-stetigen Funktionen mit Lipschitzkonstante 1. Zeigen Sie, dass $M$ in $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ abgeschlossen und totalbeschränkt und damit kompakt ist.

H8.3 **Der Approximationssatz von Weierstraß.** *In dieser Aufgabe sollen Sie einen Beweis des Approximationssatzes von Weierstraß entwickeln, der nicht den Satz von Stone-Weierstraß verwendet.*

(a) Es sei eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den Polygonzug

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (nx-k)f(\tfrac{k+1}{n}) + (k+1-nx)f(\tfrac{k}{n}) \text{ für } \tfrac{k}{n} \leq x \leq \tfrac{k+1}{n} \text{ mit } k \in \{0,1,\ldots,n-1\}.$$

Zeigen Sie: $f_n$ ist wohldefiniert und stetig.
*Hinweis:* Aufgabe H5.1(b) kann Ihnen dabei helfen.

(b) Zeigen Sie $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$.
*Hinweis:* Verwenden Sie, dass $f$ sogar gleichmäßig stetig ist, da $[0,1]$ kompakt ist.

(c) Zeigen Sie, dass $f_n$ sich als reelle Linearkombination der Funktionen $x \mapsto 1$ und $x \mapsto |x - \frac{k}{n}|$ mit $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ schreiben läßt.

(d) Es sei $\mathcal{P}_{[0,1]}$ der Raum der Polynomfunktionen $[0,1] \ni x \mapsto p(x)$, $p \in \mathbb{R}[x]$. Folgern Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n \in \overline{\mathcal{P}_{[0,1]}}$, wobei die Abschlussbildung in $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ gemeint ist.
*Hinweis:* Verwenden Sie aus der Analysis 1 (siehe Abschnitt 6.4 im Skript zur Analysis 1), dass sich der Absolutbetrag über $[-1,1]$ gleichmäßig durch Polynomfunktionen approximieren läßt:

$$\sup_{-1 \leq y \leq 1} \left| |y| - \sum_{n=0}^{k} \binom{\frac{1}{2}}{n} (y^2 - 1)^n \right| \xrightarrow{k \to \infty} 0.$$

(e) Folgern Sie, dass der Raum $\mathcal{P}_{[0,1]}$ der Polynomfunktionen dicht in $(C([0,1],\mathbb{R})\|\cdot\|_\infty)$ ist.

H8.4 **Charakterisierung kompakter Einheitskugeln** Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(a) $V$ ist endlichdimensional.

(b) Die abgeschlossene Einheitskugel $B_1(0) = \{x \in V |\ \|x\| \leq 1\}$ ist kompakt.

**Bitte wenden!**

H8.5 **Kompaktheit des Raums der $p$-adischen ganzen Zahlen.**

(a) Zeigen Sie: Der Abschluss $\overline{A}$ einer totalbeschränkten Teilmenge $A \subseteq M$ in einem halbmetrischen Raum $(M, d)$ ist totalbeschränkt.

(b) Folgern Sie: Die Vervollständigung eines totalbeschränkten halbmetrischen Raums ist kompakt.

(c*) *Anwendung in der Zahlentheorie:* Es sei $p$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass der Raum der $p$-adischen ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}_p, \hat{d}_p)$ kompakt ist, indem Sie zeigen, dass $\mathbb{Z}$ bezüglich $d_p$ totalbeschränkt ist.

H8.6* **Die erweitert komplexen Zahlen als projektiver Raum.** Auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definieren wir die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : x = \alpha y, \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Es gilt also $x \sim y$ genau dann, wenn $x$ und $y$ linear abhängig sind. Die Äquivalenzklasse von $(x_1, x_2) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ wird in Anlehnung an die Notation für die Division üblicherweise so bezeichnet:

$$(x_1 : x_2) := [(x_1, x_2)]_\sim = \{(\alpha x_1, \alpha x_2) |\; \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}.$$

Der Quotientenraum $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) := (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\})/\sim$ wird eindimensionaler komplex projektiver Raum genannt. Wir versehen ihn mit der Quotiententopologie zur Standardtopologie auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ kompakt ist.
*Hinweis:* Beachten Sie, dass $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ das Bild der Einheitssphäre

$$S^3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 |\; |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\}$$

unter der kanonischen Abbildung $k : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 : x_2)$ ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad f(x_1 : x_2) = \begin{cases} \frac{x_1}{x_2} \text{ für } x_2 \neq 0 \\ \infty \text{ für } x_2 = 0 \end{cases}$$

wohldefiniert, bijektiv und stetig mit stetiger Inverser ist, wobei $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit der Standardtopologie versehen wird. Das Gleiche mit anderen Worten gesagt: $f$ ist ein Homöomorphismus.
*Hinweis:* Überlegen Sie sich, dass die Abbildung $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1 : x_2)$, stetig ist. Verwenden Sie Lemma 1.178 im Skript.

**Abgabe:** Bis spätestens Dienstag, den 20.6.2017, 10:15 Uhr.

**LMU München** **Prof. F. Merkl**
**Mathematisches Institut**
**Sommersemester 2017**

# Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
## Blatt 8 – Tutorien

T8.1 **Bilder totalbeschränkter Mengen unter gleichmäßig stetigen Abblidungen.** Zeigen Sie: Ist $(M, d_N)$ ein totalbeschränkter halbmetrischer Raum und $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ eine gleichmäßig stetige Abbildung mit Werten in einem halbmetrischen Raum $(N, d_N)$, so ist auch das Bild $f[M]$ in $(N, d_N)$ totalbeschränkt.

T8.2 **Kompaktheit der euklidischen Einheitssphäre.**

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $S^n := \{x \in \mathbb{R}^n | \ \|x\|_2\} = 1$ die euklidische Einheitssphäre. Zeigen Sie: $S^n$ ist kompakt in der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$.

(b) Folgern Sie, dass für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Menge

$$M = \{f(x, y, z) | \ x, y, z \in \mathbb{R}, \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

ein Minimum und ein Maximum besitzt.

T8.3 **Stetigkeit linearer Abbildungen auf $\mathbb{R}^m$.** Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\| \cdot \|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^m$ und $\| \cdot \|'$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^n$. Weiter sei $L : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $L : (\mathbb{K}^m, \| \cdot \|) \to (\mathbb{K}^n, \| \cdot \|')$ stetig ist.

T8.4 **Beispiel einer abgeschlossenen und beschränkten, aber nicht kompakten Menge.** Es sei $K = \{f \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) | \ \|f\|_2 \leq 1\}$ der abgeschlossene Einheitsball in $\ell^2(\mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass $K$ nicht kompakt ist. Zeigen Sie dazu, dass die offene Überdeckung $(U_{1/\sqrt{2}}(x))_{x \in K}$ von $K$ mit den offenen Kugeln $U_{1/\sqrt{2}}(x) = \{y \in \ell^2(\mathbb{N}) | \ \|y - x\|_2 < 1/\sqrt{2}\}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt, indem Sie zeigen, dass keine der Mengen $U_{1/\sqrt{2}}(x)$ mindestens zwei "kanonische Einheitsvektoren" $e_n$, $n \in \mathbb{N}$, enthält, wobei $e_n(j) = \delta_{n,j}$ (Kronecker-Delta).