LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 7 – Hausaufgaben

Manche der folgenden Aufgaben setzen Kenntnisse aus der Linearen Algebra zur Berechnung einer Diagonalisierung bzw. einer Jordan-Normalform voraus. Falls Sie Jordan-Normalformen noch nicht berechnen können, dürfen Sie die Bearbeitung der entsprechenden Aufgabenteile bis zur Abgabe der Übungsmappe zurückstellen.

H7.1 **Stetige Abhängigkeit von Fixpunkten von einem Parameter.** Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Kontraktion bezüglich der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass es genau eine *stetige* Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $g(x) = f(g(x)) + x$.

H7.2 **Zwei lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten.** Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = Ay(x), \quad y(0) = b \in \mathbb{R}^n$$

für folgende Fälle:

a) $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$,

b) $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

H7.3 **Schwingungsgleichung mit Dämpfungsterm.** Eine punktförmige Masse hängt an einer Feder (Federkonstante 1). Zusätzlich zur Federkraft, die die Masse zur Gleichgewichtslage zurücktreibt, wirkt noch eine bremsende Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit. Wir beschreiben dieses Modell durch die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y_1''(t) = -y_1(t) - \mu y_1'(t)$$

oder äquivalent durch das System

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t), \\ y_2'(t) &= -y_1(t) - \mu y_2(t) \end{aligned}$$

mit einem "Reibungskoeffizienten" $\mu \geq 0$. Berechnen Sie die Lösung dieses Differentialgleichungssystems für eine gegebene Anfangsbedingung $y_1(0) = b_1$, $y_2(0) = b_2$. Für welche Werte von μ ist die zum Differentalgleichungssystem gehörende Matrix diagonalisierbar? Für welchen Wert von μ braucht man ein 2×2-Jordankästchen?

H7.4 **Kinetik chemischer Reaktionen.** In einem Reaktionsgefäß befinden sich drei chemische Substanzen Die Substanzen können sich nach folgenden Reaktionen ineinander umwandeln:

$$A \rightleftarrows B \rightleftarrows C$$

wobei die Rate, mit der A in B umgewandelt wird, proportional zur Konzentration von A ist mit Proportionalitätskonstanten $k_{AB} > 0$. Analoges gilt für die Reaktionen

$$B \to C\,,\ C \to B\,,\ B \to A$$

mit Proportionalitätskonstanten k_{BC}, k_{CB}, k_{BA}.

(a) Beschreiben Sie die Dynamik der Konzentrationen $a(t), b(t), c(t)$ von A, B, C zum Zeitpunkt t durch ein Differentialgleichungssystem.

(b) Lösen Sie dieses System mit der Anfangsbedingung $a(0) = 1$, $b(0) = 0$, $c(0) = 0$ (d.h. anfangs ist nur A im Reaktionsgefäß vorhanden.)

(c) Berechnen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} a(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty} b(t)$ und $\lim\limits_{t\to\infty} c(t)$.

Bitte wenden!

H7.5 **Fehlerabschätzung im Iterationsverfahren nach Picard-Lindelöf.** Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis des Satzes 1.144 im Skript (Satz von Picard-Lindelöf) sei

$$(y^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$$

die wie im Banachschen Fixpunktsatz rekursiv definierte Folge mit der konstanten Startfunktion

$$y^{(0)}(x) = b \text{ für } x \in I$$

und dem Rekursionsschritt

$$y^{(m+1)} = \Phi(y^{(m)}) \text{ für } m \in \mathbb{N}_0.$$

Es sei $C = \sup_{x\in I} \|f(x,b)\|$. Zeigen Sie für alle $x \in I$ und $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\|y^{(m+1)}(x) - y^{(m)}(x)\| \le CL^m \frac{|x-a|^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Folgern Sie für den Fixpunkt y von Φ, $x \in I$ und $m \in \mathbb{N}_0$ im Fall $L > 0$:

$$\begin{aligned}\|y(x) - y^{(m)}(x)\| &\le C \sum_{k=m+1}^{\infty} L^{k-1} \frac{|x-a|^k}{k!} \\ &= \frac{C}{L}\left(e^{L|x-a|} - \sum_{k=0}^{m} \frac{(L|x-a|)^k}{k!}\right) = C\left|\int_a^x \frac{|L(x-t)|^m}{m!} e^{L|t-a|}\, dt\right|.\end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Lagrange-Darstellung des Taylor-Restglieds.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 13.6.2017, 10:15 Uhr.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 6 – Tutorien

T7.1 **Numerisches Beispiel zum Banachschen Fixpunktsatz: Approximation an $\sqrt{2}$.** Berechnen Sie mit Taschenrechnergenauigkeit die ersten drei Näherungen x_1, x_2, x_3 an $\sqrt{2}$ nach dem Heronverfahren mit der Startnäherung $x_0 = 2$. Berechnen Sie die a-priori-Schranke und die a-posteriori-Schranke für den Fehler $|x_n - \sqrt{2}|$, $n = 1, 2, 3$, die sich aus dem Banachschen Fixpunktsatz mit der Kontraktionskonstante $K = \frac{1}{2}$ ergibt. Vergleichen Sie (mit Taschenrechnergenauigkeit) diese Fehlerschranken mit dem tatsächlichen Wert des Fehlers $|x_n - \sqrt{2}|$.

T7.2 **Invertierbarkeit von Matrizen nahe an der Einheitsmatrix.** Gegeben sei eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{k,l})_{k,l=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, mit reellen Einträgen $a_{k,l}$ mit

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}^2 < 1.$$

Beweisen Sie, dass die Fixpunktgleichung

$$x = Ax + b$$

für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ besitzt. Folgern Sie, dass die Matrix $\mathrm{Id} - A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar ist, wobei $\mathrm{Id} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.
Hinweis: Aufgabe H5.3 kann Ihnen dabei helfen.

T7.3 **Beispiel zur Matrix-Exponentialfunktion.** Berechnen Sie die Werte der Matrix-Exponentialfunktion $\exp(it\sigma_j)$ für $t \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$, die imaginäre Einheit $i \in \mathbb{C}$ und die drei 2×2-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

auf zwei verschiedene Weisen:

(a) für $j = 1, 2, 3$ direkt nach der Definitionsgleichung

$$\exp(it\sigma_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(it\sigma_j)^k,$$

indem Sie σ_j^k für alle $k \in \mathbb{N}_0$ berechen;

(b) für $j = 1, 2$, indem Sie σ_j diagonalisieren, $\sigma_j = T_j\sigma_3T_j^{-1}$, mit einer invertierbaren Matrix T_j, und dann $\exp(it\sigma_j) = T_j \exp(it\sigma_3)T_j^{-1}$ verwenden.

Überzeugen Sie sich davon, dass die beiden Rechenwege im Fall $j = 1, 2$ das gleiche Ergebnis liefern. Die drei Matrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ werden "Pauli-Matrizen" genannt.

T7.4* **Berechnung von $i \in \mathbb{Z}_5$ mit $i^2 = -1$.** Es sei $f : 2+5\mathbb{Z}_5 \to 2+5\mathbb{Z}_5$, $f(x) = x^2+x+1$. Weiter definieren wir rekursiv: $x_0 = 2$, $x_{n+1} = f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Aus Beispiel 1.139 im Skript und dem Banachschen Fixpunktsatz wissen wir, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen die Lösung $i \in 2 + 5\mathbb{Z}_5$ der Gleichung $i^2 = -1$ bezüglich der vervollständigten 5-adischen Metrik $\hat{d}_5 : \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{R}$ konvergiert. Berechnen Sie die 5-adische Darstellung

$$x_n = \sum_{k=0}^{m_n} x_{n,k}5^k, \quad x_{n,k} \in \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

($m_n \in \mathbb{N}_0$ möglichst klein) von x_n für $n = 0, 1, 2, 3$. Alle Rechnungen sollen Sie im 5-adischen System statt im Dezimalsystem durchführen. Berechnen Sie auch die Ziffern i_0, i_1, i_2, i_3 in der 5-adischen Darstellung von i:

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} i_k5^k, \quad i_k \in \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

wobei die Konvergenz der Reihe bezüglich $\hat{d}_5$ gemeint ist. Stellen Sie die berechneten Ziffern $x_{n,k}$ und i_k in einer Tabelle dar, wobei n der Zeilenindex und k der Spaltenindex sein soll.