LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 6 – Hausaufgaben

H6.1 **Potenzfunktionen in $L^p([0,1])$.** Es seien $1 \leq p < \infty$, $\alpha > 0$, und $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \min\{n, x^{-\alpha}\}$ für $n \in \mathbb{N}$, wobei wir formal $0^{-\alpha} := +\infty$ setzen. Bestimmen Sie, für welche Werte von p und α die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(L^p([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ konvergiert.

H6.2 **Approximation einer Sprungfunktion durch stetige Funktionen.** Es sei $a > 0$ und $f_n : [-a,a] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \min\{1, \max\{0, n(a/2 - |x|)\}\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(L^2([-a,a],\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ gegen ein $f \in L^2([-a,a],\mathbb{K})$ konvergiert. Zeigen Sie $\|f\|_2 = \sqrt{a}$.

H6.3 **Dichtheit von Quadern und Vervollständigung endlicher kartesischer Produkte.** Es seien (M_k, d_k), $k = 1,\ldots,n$ mit $n \in \mathbb{N}$, halbmetrische Räume mit dem Produktraum $M = M_1 \times \ldots \times M_n$, versehen mit der Produktmetrik d.

(a) Es seien $A_k \subseteq M_k$ für $k = 1,\ldots,n$. Zeigen Sie:

$$\overline{A_1} \times \ldots \times \overline{A_n} = \overline{A_1 \times \ldots \times A_n}.$$

Folgern Sie: Ist für alle $k = 1,\ldots,n$ die Menge A_k dicht in (M_k, d_k), so ist auch $A_1 \times \ldots \times A_n$ dicht in M.

(b) Für jedes $k = 1,\ldots,n$ sei $(\hat{M}_k, \hat{d}_k, i_k)$ eine Vervollständigung von M_k. Es seien $\hat{M} := \hat{M}_1 \times \ldots \times \hat{M}_n$ und $\hat{d}$ die Produktmetrik auf $\hat{M}$ zu $d_1,\ldots,d_n$, sowie $i : M \to \hat{M}$, $i(x_1,\ldots,x_n) = (i_1(x_1),\ldots,i_n(x_n))$. Zeigen Sie, dass $(\hat{M}, \hat{d}, i)$ eine Vervollständigung von (M,d) ist.

H6.4 **Einbettung von L^p in L^q.** Es seien $p, q \in [1,\infty[$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Identität $\mathrm{id} : C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$, $f \mapsto f$, genau dann eine Fortsetzung zu einer stetigen Abbildung

$$I : (L^p([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_p) \to (L^q([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_q)$$

besitzt, wenn $p \geq q$ gilt.

H6.5 **Beispiel eines Elements von $L^p[0,1]$, dem keine Riemann-integrierbare Funktion entspricht.** Es sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $f_n \in C([0,1],\mathbb{R})$, $f_n(x) = n\exp(-e^n|x - q_n|)$. Weiter sei $1 \leq p < \infty$ und $\|\cdot\|_p$ die p-Norm auf $C([0,1],\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p < \infty$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst für alle $n \in \mathbb{N}$ mit einer geeigneten Konstanten c_p:

$$\|f_n\|_p \leq n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-pe^n|x - q_n|)\, dx \right)^{1/p} = c_p n e^{-n/p}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bezüglich der p-Norm bildet. Sie konvergiert also in $(L^p([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ auch punktweise gegen ein $f : [0,1] \to [0,+\infty]$ konvergiert.

(d) Zeigen Sie für diesen punktweisen Limes f, dass für alle Intervalle $[a,b] \subseteq [0,1]$ mit $a < b$ gilt: $\sup_{x\in[a,b]} f(x) = +\infty$. Insbesondere ist f nicht Riemann-integrierbar.

Bitte wenden!

H6.6 **Beispiel eines Sobolevraums.** Der $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$V := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} | \ f \text{ ist stetig differenzierbar}\}$$

(wobei die Differenzierbarkeit am Rand einseitig gemeint ist) werde mit der Norm

$$\|f\|_{1,2} := \sqrt{\int_0^1 [f(x)^2 + f'(x)^2] \, dx}$$

versehen. (Sie brauchen nicht zu zeigen, dass das wirklich eine Norm ist.)

(a) Zeigen Sie: Die Inklusionsabbildung

$$\iota : (V, \| \cdot \|_{1,2}) \to (C([0,1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty), \quad \iota(f) := f$$

ist stetig.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst für $f \in V$ und $x \in [0,1]$:

$$f(x) = \int_0^1 f(t) \, dt + \int_0^1 (t - 1_{\{t>x\}}) f'(t) \, dt.$$

Folgern Sie mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\left| \int_0^1 f(t) \, dt \right| \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_{1,2},$$
$$\left| \int_0^1 (t - 1_{\{t>x\}}) f'(t) \, dt \right| \leq \|f'\|_2 \leq \|f\|_{1,2}$$

und damit $\|f\|_\infty \leq 2\|f\|_{1,2}$.

(b) Es sei $(\hat{V}, \| \cdot \|_{1,2})$ die Vervollständigung von $(V, \| \cdot \|_{1,2})$, wobei die auf die Vervollständigung hochgehobene Norm mit demselben Symbol $\| \cdot \|_{1,2}$ bezeichnet wird. Zeigen Sie, dass ι eine stetige Fortsetzung $\hat{\iota} : (\hat{V}, \| \cdot \|_{1,2}) \to (C([0,1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$ auf die Vervollständigung besitzt.

H6.7* **Division in $\mathbb{Z}_p$.** Es sei p eine Primzahl und $a \in \mathbb{N}$ eine dazu teilerfremde Zahl.

(a) Zeigen Sie, dass die Divisionsabbildung $q_a : a\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $q_a(x) = \frac{x}{a}$ bezüglich der p-adischen Metrik d_p gleichmäßig stetig ist.
Hinweis: Wie in Aufgabe H4.6(b) dürfen Sie als bekannt voaussetzen, dass es $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $ma + np = 1$ gibt. Schreiben Sie für $x \in a\mathbb{Z}$ den Quotienten $\frac{x}{a}$ als geometrische Reihe

$$\frac{x}{a} = xm \sum_{k=0}^\infty (np)^k,$$

wobei hier die Konvergenz der Reihe bezüglich der p-adischen Metrik gemeint ist.

(b) Folgern Sie, dass die Abbildung $q_a : a\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ eine bezüglich der vervollständigten p-adischen Metrik $\hat{d}_p$ gleichmäßig stetige Fortsetzung $\hat{q}_a : (\mathbb{Z}_p, \hat{d}_p) \to (\mathbb{Z}_p, \hat{d}_p)$ besitzt.
Hinweis: Verwenden Sie die Dichtheit von $a\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ bezüglich der p-adischen Metrik aus Aufgabe H4.6(b).

Abgabe: Bis spätestens Mittwoch, den 7.6.2017, 10:15 Uhr.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 6 – Tutorien

T6.1 **Iteration des Cosinus.** Geben Sie eine beliebige Zahl x in Ihren Taschenrechner ein und drücken Sie immer wieder (im Bogenmaß-Modus) die Cosinus-Taste. Wiederholen Sie das Experiment mit anderen Zahlen. Beschreiben Sie, was Sie beobachten.

T6.2 **Hochheben der $\leq$-Relation von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$.** Für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ sei

$$\leq_{\mathbb{K}} = \{(a,b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} |\ a \leq b\}$$

die $\leq$-Relation auf $\mathbb{K}$. Zeigen Sie

$$\overline{\leq_{\mathbb{Q}}} = \leq_{\mathbb{R}},$$

wobei hier der Abschluss bezüglich der Standardtopologie auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gemeint ist.

T6.3 **Stetige Funktionen mit periodischen Randbedingungen in L^2.** Zeigen Sie für $a < b$, dass die Menge $M = \{f \in C([a,b], \mathbb{K}) |\ f(a) = f(b)\}$ dicht in $(C([a,b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ und in $(L^2([a,b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ ist.

T6.4 **Dichtheitsargumente zur Gleichheit und zum Vergleich von Funktionen.**

(a) Es seien $(M, \mathcal{T}_M)$ ein topologischer Raum, $(N, \mathcal{T}_N)$ ein Hausdorffraum, $f, g : (M, \mathcal{T}_M) \to (N, \mathcal{T}_N)$ zwei stetige Abbildungen und $A \subseteq M$ eine dichte Teilmenge, so dass die Einschränkungen von f und von g auf A übereinstimmen. Zeigen Sie: $f = g$.

(b) Es seien $(M, \mathcal{T}_M)$ ein topologischer Raum, $f, g : (M, \mathcal{T}_M) \to \mathbb{R}$ zwei stetige Abbildungen und $A \subseteq M$ eine dichte Teilmenge, so dass für alle $x \in A$ gilt: $f(x) \leq g(x)$. Zeigen Sie: $f \leq g$. *Hinweis:* Betrachten Sie das Urbild der abgeschlossenen Menge $]-\infty, 0] \subset \mathbb{R}$ unter der Abbildung $f - g$. Zeigen Sie, dass $f - g$ stetig ist.

T6.5 **p-adische Zahlendarstellung.**

(a) Es sei p eine Primzahl und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge mit Werten in $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_n p^n \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

in $(\mathbb{Z}_p, \hat{d}_p)$ konvergiert.

(b*) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$j : \{0, 1, \ldots, p-1\}^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{Z}_p, \quad j((a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n p^n$$

bijektiv ist, wobei die Konvergenz der Reihe in $(\mathbb{Z}_p, \hat{d}_p)$ gemeint ist