LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 5 – Hausaufgaben

H5.1 **Stetigkeit und Zerschneiden.** Gegeben seien zwei topologische Räume $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ und eine Abbildung $f : X \to Y$. Für jedes $U \subseteq X$ bezeichne $\mathcal{T}_U$ die Teilraumtopologie auf U bzgl. $\mathcal{T}$.

(a) Es sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X Zeigen Sie, dass $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ genau dann stetig ist, wenn alle Einschränkungen $f|_{U_i} : (U_i, \mathcal{T}_{U_i}) \to (Y, \mathcal{S})$, $i \in I$, stetig sind.

(b) Es seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}$, und es gelte $A \cup B = X$. Zeigen Sie, dass $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ genau dann stetig ist, wenn die beiden Einschränkungen $f|_A : (A, \mathcal{T}_A) \to (Y, \mathcal{S})$ und $f|_B : (B, \mathcal{T}_B) \to (Y, \mathcal{S})$ stetig sind.

Hinweis: Verwenden Sie die Aufgabe H4.2.
Anwendungsbeispiel: Sind $f, g : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ stetig, so ist auch ihr Maximum $f \vee g : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$ stetig. Das sieht man mit Hilfe von (b) so:

- Die Mengen $A := \{x \in X|\ f(x) \geq g(x)\}$ und $B := \{x \in X|\ f(x) \leq g(x)\}$ erfüllen $A \cup B = X$.
- Es sei $h := f - g : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ die Differenzabbildung. Sie ist stetig, da f und g stetig sind. Folglich sind $A = h^{-1}[\mathbb{R}_0^+]$ und $B = h^{-1}[\mathbb{R}_0^-]$ als Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen.
- Die beiden Einschränkungen $f \vee g|_A = f|_A : (A, \mathcal{T}_A) \to \mathbb{R}$ und $f \vee g|_B = g|_B : (B, \mathcal{T}_B) \to \mathbb{R}$ sind stetig.

H5.2 **Operatornorm.** Es seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ zwei normierte Räume über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und

$$\mathcal{B}(V, W) := \{L : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)|\ L \text{ ist stetig und linear}\}$$

Für $L \in \mathcal{B}(V, W)$ setzen wir

$$\|L\|_{V\to W} := \inf\{C \geq 0|\ \forall x \in V :\ \|L(x)\|_W \leq C\|x\|_V\}.$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{V\to W} : \mathcal{B}(V, W) \to \mathbb{R}$ eine Norm auf $\mathcal{B}(V, W)$ ist. Sie wird *Operatornorm* auf $\mathcal{B}(V, W)$ genannt. Zeigen Sie auch

$$\|L\|_{V\to W} = \sup\{\|L(x)\|_W|\ x \in V,\ \|x\|_V \leq 1\}.$$

Bemerkung: Sind Normen auf $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^n$ und eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ gegeben, so wird die zugehörige Operatornorm der linearen Abbildung $L_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$, $L_A(x) = Ax$ auch *Matrixnorm* von A genannt.

H5.3 **Vergleich einer Matrixnorm mit der euklidischen Norm.** Es sei $A = (a_{i,j})_{i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m} \in \mathbb{K}^{n\times m}$ eine $n \times m$-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{K}$ und $L_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$, $L_A(x) = Ax$ die zugehörige lineare Abbildung. Zeigen Sie

$$\|L_A\|_{\mathbb{K}^m\to\mathbb{K}^n} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{i,j}|^2}$$

für die Operatornorm von $L_A : (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$. (*Hinweis:* Cauchy-Schwarz-Ungleichung.) Zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, dass

$$\|L_A\|_{\mathbb{K}^m\to\mathbb{K}^n} < \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{i,j}|^2}$$

möglich ist.

Bitte wenden!

H5.4 **Submultiplikativität der Operatornorm.** Lösen Sie *eine* der beiden folgenden Aufgaben:

(a) Es seien $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times l}$ mit $l, m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für die Matrixnormen $\|\cdot\|$ zu beliebigen Normen auf $\mathbb{K}^l$, $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^n$:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

(b) Es seien $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume. Weiter seien $L : (U, \|\cdot\|_U) \to (V, \|\cdot\|_V)$ und $M : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ stetige lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass für die zugehörigen Operatornormen $\|\cdot\|_{U\to V}$, $\|\cdot\|_{V\to W}$ und $\|\cdot\|_{U\to W}$ gilt:

$$\|M \circ L\|_{U\to W} \leq \|M\|_{V\to W}\|L\|_{U\to V}.$$

Mit der Notation aus Aufgabe H5.2 und Lemma 1.70 im Skript folgt: Die Kompositionsabbildung $\circ : \mathcal{B}(V, W)\times\mathcal{B}(U, V) \to \mathcal{B}(U, V)$, $(f, g) \mapsto f\circ g$ ist stetig bezüglich der Produktmetrik zu $\|\cdot\|_{V\to W}$, $\|\cdot\|_{U\to V}$ und der Metrik zur Operatornorm $\|\cdot\|_{U\to W}$.

H5.5 **Quotientenbildung in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.** Zeigen Sie, dass die Quotientenabbildung $q : \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \to \mathbb{C}$, $q(x, y) = x/y$ eine Fortsetzung zu einer stetigen Abbildung $Q : (\mathbb{C}\cup\{\infty\})^2\setminus\{(0, 0), (\infty, \infty)\} \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$, jedoch keine Fortsetzung zu einer in $(0, 0)$ oder in (∞, ∞) stetigen Funktion mit Werten in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ besitzt. Dabei werden Teilmengen von $(\mathbb{C}\cup\{\infty\})^2$ mit der Teilraumtopologie zur Produkttopologie der Standardtopologie auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ versehen.

H5.6* **Gleichmäßige Stetigkeit der arithmetischen Operationen in der p-adischen Metrik.** Es sei p eine Primzahl und $d_p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ die p-adische Metrik aus Beispiel 1.2.3 im Skript, sowie $v_p(k) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ die Vielfachheit p in der Primfaktorzerlegung von $k \in \mathbb{Z}$. Weiter sei d die Produktmetrik zu d_p auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie für $k, l \in \mathbb{Z}$:

$$v_p(kl) = v_p(k) + v_p(l).$$

Sie dürfen dabei aus der elementaren Zahlentheorie für ganze Zahlen m, n als bekannt voraussetzen, dass mn nicht durch p teilbar ist, wenn m und n nicht durch p teilbar sind.

(b) Folgern Sie, dass die arithmetischen Operationen

$$+ : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, d) \to (\mathbb{Z}, d_p) \text{ und } \cdot : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, d) \to (\mathbb{Z}, d_p)$$

gleichmäßig stetig sind.

H5.7* **Leseaufgabe.** Lesen und verstehen Sie den Abschnitt 1.6 zur Initial- und Finaltopologie im Skript.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 30.05.2017, 10:15 Uhr.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 5 – Tutorien

T5.1 **Cauchyfolgen.**

(a) Es sei (M, d) ein halbmetrischer Raum. Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in M genau dann eine Cauchyfolge ist, wenn gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{m:\, m\geq n} d(a_n, a_m) = 0.$$

(b) Zeigen Sie: Sind (M, d) und (N, d') zwei halbmetrische Räume, $f : M \to N$ eine gleichmäßig stetige Abbildung und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (M, d), so ist $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (N, d').

T5.2 **Stetigkeit und Urbilder abgeschlossener Mengen** Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : (M, \mathcal{T}_M) \to (N, \mathcal{T}_N)$ zwischen zwei topologischen Räumen genau dann stetig ist, wenn für alle bzgl. $\mathcal{T}_N$ abgeschlossenen Mengen $A \subseteq N$ das Urbild $f^{-1}[A]$ abgeschlossen bzgl. $\mathcal{T}_M$ ist.
Typische Anwendungsbeispiele:

(a) Ist $L : V \to W$ eine stetige lineare Abbildung zwischen zwei normierten Räumen $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$, so ist ihr Kern $\ker L = L^{-1}[\{0\}]$ abgeschlossen in V, da $\{0\} \subseteq W$ abgeschlossen ist.

(b) Die Einheitsphäre $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = \{v \in \mathbb{R}^3 |\ \|v\|_2 = 1\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^3$ als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{1\} \subset \mathbb{R}$ unter der Normabbildung $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die stetig ist.

T5.3 **Stetigkeit der Identität bei wechselnden Topologien.** Es seien $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ zwei Halbnormen auf dem gleichen $\mathbb{K}$-Vektorraum V, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

(a) Die Identität $\mathrm{id} : (V, \|\cdot\|_A) \to (V, \|\cdot\|_B)$, $\mathrm{id}(x) = x$, ist stetig,

(b) $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_B} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|_A}$,

(c) $\exists C \geq 0\ \forall x \in V :\ \|x\|_B \leq C\|x\|_A$.

Insbesondere erzeugen die beiden Halbnormen genau dann die gleiche Topologie, wenn gilt:

$$\exists c > 0, C > 0\ \forall x \in V :\ c\|x\|_A \leq \|x\|_B \leq C\|x\|_A.$$

In diesem Fall heißen die beiden Halbnormen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ *äquivalent.*

T5.4 **Stetigkeit von Projektionen und Inklusionen.** Es seien $(M_1, d_1), \ldots, (M_n, d_n)$ halbmetrische Räume, $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei das kartesische Produkt $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ mit der Produkthalbmetrik d versehen. Zeigen Sie:

(a) Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist die kanonische Projektion $f_i : M \to M_i$, $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, gleichmäßig stetig.

(b) Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $(x_1, \ldots, x_n) \in M$ ist die Inklusionsabbildung $g_i : M_i \to M$, definiert durch $(g_i(y))_j = x_j$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $j \neq i$ und $(g_i(y))_i = y$ eine Isometrie (d.h. abstandserhaltend) und daher gleichmäßig stetig.

T5.5 **Äquivalenz aller p-Normen auf $\mathbb{K}^n$.** Zeigen Sie für $1 \leq p < q \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $x \in \mathbb{K}^n$:

$$n\|x\|_\infty \geq \|x\|_p \geq \|x\|_q \geq \|x\|_\infty.$$

Insbesondere sind alle Normen $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{K}^n$, $1 \leq p \leq \infty$, zueinander äquivalent. Später werden wir sehen, dass dies sogar für *alle* Normen auf $\mathbb{K}^n$ gilt; siehe Satz 1.169 im Skript.