LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 4 – Hausaufgaben

H4.1 **Teilraumtopologie.**

(a) Es seien $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Zeigen Sie, dass durch $\mathcal{T}_A := \{U \cap A |\ U \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie auf A definiert wird. Sie wird die *Teilraumtopologie*, synonym *Relativtopologie*, auf A bzgl. $\mathcal{T}$ genannt. Die Elemente von $\mathcal{T}_A$ werden *offen relativ zu* A genannt.

(b) Nun sei zusätzlich eine Menge $B \subseteq A$ gegeben. Zeigen Sie: Ist A dicht in $(X, \mathcal{T})$ und ist B dicht in $(A, \mathcal{T}_A)$, so ist B auch dicht in $(X, \mathcal{T})$.

H4.2 **Zerschneiden offener Mengen mit Überdeckungen.** Gegeben sei ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$.

(a) Es sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X, d.h. $U_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$ und $\bigcup_{i\in I} U_i = X$. Zeigen Sie für alle $Y \subseteq X$ die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

i. $Y \in \mathcal{T}$,
ii. $\forall i \in I:\ Y \cap U_i \in \mathcal{T}_{U_i}$, wobei $\mathcal{T}_{U_i}$ die Teilraumtopologie auf U_i bzgl. $\mathcal{T}$ bezeichnet.

(b) Es seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}$, und es gelte $A \cup B = X$. Zeigen Sie für alle $Y \subseteq X$ die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

i. $Y \in \mathcal{T}$,
ii. $Y \cap A \in \mathcal{T}_A$ und $Y \cap B \in \mathcal{T}_B$, wobei $\mathcal{T}_A$ bzw. $\mathcal{T}_B$ die Teilraumtopologie auf A bzw. B bzgl. $\mathcal{T}$ bezeichnet.

H4.3 **Quotiententopologie.**

(a) Es seien $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Weiter sei $k : M \to M/\!\sim$, $k(x) = [x]_\sim$ die kanonische Abbildung von M in den Quotientenraum $M/\!\sim$. Zeigen Sie, dass durch $\mathcal{T}_\sim := \{U \subseteq M/\!\sim |\ k^{-1}[U] \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie auf $M/\!\sim$ definiert wird. Sie wird die *Quotiententopologie* zu $\mathcal{T}$ bzgl. $\sim$ genannt. *Erinnerung:* $k^{-1}[U] = \{x \in M |\ k(x) \in U\}$ bezeichnet das Urbild von U unter k.

(b) Nun seien (M, d) ein halbmetrischer Raum und $(M/\!\sim, d')$ der durch Verkleben von Punkten mit Abstand 0 entstehende metrische Raum aus Beispiel 1.9 im Skript. Zeigen Sie: Die Quotiententopologie $(\mathcal{T}_d)_\sim$ auf $M/\!\sim$ zu der von der Halbmetrik d erzeugten Topologie $\mathcal{T}_d$ stimmt mit der von der Metrik d' erzeugten Topologie $\mathcal{T}_{d'}$ auf $M/\!\sim$ überein.

H4.4 **Produkttopologie mit zwei Faktoren.**

(a) Gegeben seien zwei topologische Räume $(M_1, \mathcal{T}_1)$ und $(M_2, \mathcal{T}_2)$. Zeigen Sie, dass durch

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq M_1 \times M_2 |\ \forall x \in U\ \exists U_1 \in \mathcal{T}_1\ \exists U_2 \in \mathcal{T}_2 :\ x \in U_1 \times U_2 \subseteq U\}$$

eine Topologie auf dem kartesischen Produkt $M := M_1 \times M_2$ definiert wird. Sie wird die Produkttopologie zu $(M_1, \mathcal{T}_1)$ und $(M_2, \mathcal{T}_2)$ genannt.
Bemerkung: Die Produkttopologie mit endlich vielen statt zwei Faktoren wird analog definiert.

(b) Nun seien zusätzlich Halbmetriken d_1 und d_2 auf M_1 bzw. M_2 gegeben, die die Topologien $\mathcal{T}_1$ bzw. $\mathcal{T}_2$ erzeugen. Weiter bezeichne $d : M \times M \to \mathbb{R}$, $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$, die Produkthalbmetrik aus Aufgabe H1.2. Zeigen Sie, dass d die Produkttopologie $\mathcal{T}$ erzeugt.
Bemerkung: Analoges gilt für die Produkttopologie und die Produkthalbmetrik bei endlich vielen statt zwei Faktoren.

(c) Nun sei speziell $(M_1, \mathcal{T}_1) = (M_2, \mathcal{T}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{|\cdot|})$ der Raum der reellen Zahlen, versehen mit der Standardtopologie. Zeigen Sie, dass die zugehörige Produkttopologie auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{C}$ mit der aus der Analysis 1 bekannten Standardtopologie auf $\mathbb{C}$ übereinstimmt.

Bitte wenden!

H4.5 **Approximation Riemann-integrierbarer Funktionen durch stetige Funktionen.**
Es sei $(\mathcal{R}([a,b],\mathbb{K}),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ der Prähilbertraum der Riemann-integrierbaren Funktionen aus Beispiel 1.17.2 im Skript. Zeigen Sie, dass $C([a,b],\mathbb{K})$ dicht in $(\mathcal{R}([a,b],\mathbb{K}),\|\cdot\|_2)$ ist. Zeigen Sie dazu zuerst, dass sich jede Indikatorfunktion 1_I eines Intervalls $I\subseteq[a,b]$ in der 2-Norm beliebig genau durch stetige Funktionen approximieren lässt. Betrachten Sie dazu die Funktionen

$$f_n(x) := \max\{1-n\,\mathrm{dist}(x,I),0\} \text{ für } n\in\mathbb{N}, x\in[a,b],$$

wobei $\mathrm{dist}(x,I)=\inf\{|x-y|\ |y\ \in I\}$ den Abstand von x zu I bezeichnet. Folgern Sie daraus, dass jede Treppenfunktion im Abschluss von $C([a,b],\mathbb{K})$ in $(\mathcal{R}([a,b],\mathbb{K}),\|\cdot\|_2)$ liegt. Zeigen Sie dann, dass der Raum der Treppenfunktionen dicht in $(\mathcal{R}([a,b],\mathbb{K}),\|\cdot\|_2)$ liegt.

H4.6* ***p*-adische Topologie auf $\mathbb{Z}$.** Es sei p eine Primzahl und d_p die p-adische Metrik auf $\mathbb{Z}$ aus Beispiel 1.2.3. im Skript.

(a) Beweisen Sie, dass für alle $k\in\mathbb{Z}$ und $m\in\mathbb{N}_0$ die Menge $k+p^m\mathbb{Z}=\{k+p^mz|z\in\mathbb{Z}\}$ offen und abgeschlossen bezüglich d_p ist.

(b) Weiter sei eine nicht durch p teilbare Zahl $a\in\mathbb{N}$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Menge $a\mathbb{Z}=\{az|z\in\mathbb{Z}\}$ dicht in $\mathbb{Z}$ bezüglich d_p ist.
Hinweis: Aus der elementaren Zahlentheorie dürfen Sie als bekannt voraussetzen, dass für alle $x,y\in\mathbb{N}$ gilt: $\{\mathrm{ggT}(x,y)z|\ z\in\mathbb{Z}\}=\{xn+ym|\ m,n\in\mathbb{Z}\}$, wobei $\mathrm{ggT}(x,y)$ den größten gemeinsamen Teiler von x und y bezeichnet. Zum Beispiel gilt $\mathrm{ggT}(a,p^m)=1$ für alle $m\in\mathbb{N}_0$.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 23.05.2017, 10:15 Uhr.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 4 – Tutorien

T4.1 **Abgeschlossene Kugeln und Abschluss offener Kugeln.** Es sei (M, d) ein halbmetrischer Raum, $x \in M$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass $B_r^d(x) := \{y \in M |\ d(x, y) \leq r\}$ eine abgeschlossene Menge mit $B_r^d(x) \supseteq \overline{U_r^d(x)}$ ist. Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel, dass $B_r^d(x) \neq \overline{U_r^d(x)}$ gelten kann. Zeigen Sie jedoch, dass in einem *halbnormierten* Raum $B_r^d(x) = \overline{U_r^d(x)}$ gilt.

T4.2 **Iterierter Abschluss und iteriertes Inneres.** Es sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $N \subseteq M$. Zeigen Sie:

(a) N ist genau dann abgeschlossen, wenn $N = \overline{N}$ gilt. Folgern Sie: $\overline{\overline{N}} = \overline{N}$.

(b) N ist genau dann offen, wenn $N = N^\circ$ gilt. Folgern Sie: $N^{\circ\circ} = N^\circ$.

T4.3 **Stetige Abbildungen reißen Berührpunkte nicht ab.** Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : (M, \mathcal{T}_M) \to (N, \mathcal{T}_N)$ zwischen zwei topologischen Räumen genau dann stetig in $x \in M$ ist, wenn für alle Mengen $A \subseteq M$, die x als Berührpunkt bzgl. $\mathcal{T}_M$ besitzen, gilt: $f(x)$ ist ein Berührpunkt von $f[A]$ bzgl. $\mathcal{T}_N$. Folgern Sie: $f : (M, \mathcal{T}_M) \to (N, \mathcal{T}_N)$ ist genau dann stetig, wenn für alle Mengen $A \subseteq M$ gilt: $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

T4.4 **(Nicht-)Dichtheit von $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ in ℓ^p.** Zeigen Sie, dass der Raum

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} := \{(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} |\ \alpha_j = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } j \in \mathbb{N}\}$$

dicht in $(\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ für $1 \leq p < \infty$, aber nicht dicht in $(\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ist.