LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 3 – Hausaufgaben

H3.1 **Dualität zwischen p- und q-Norm für stetige Funktionen.** Mit den Notationen aus Aufgabe T3.3 seien $p, q \in [1, \infty]$ konjugiert zueinander und $f \in C([a, b], \mathbb{K})$. Zeigen Sie:

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \left| \int_a^b f(x)g(x)\, dx \right| \,\middle|\, g \in C([a, b], \mathbb{K}), \|g\|_q \leq 1 \right\}. \tag{1}$$

Lassen Sie sich dazu vom Beweis des Korollars 1.22 im Skript inspirieren.

H3.2 **Dreicksungleichung für die p-Norm auf stetigen Funktionen.** Es seien $1 \leq p < \infty$ und $-\infty < a < b < \infty$. Beweisen Sie die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_p : C([a, b], \mathbb{K}) \to \mathbb{R}$.

H3.3 **Beschränkung von Halbmetriken.** Es sei (M, d) ein halbmetrischer Raum und $a \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass durch

$$d_1 : M \times M \to \mathbb{R}, \quad d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{a + d(x, y)}$$

und durch

$$d_2 : M \times M \to \mathbb{R}, \quad d_2(x, y) = \min\{d(x, y), a\}$$

Halbmetriken auf M gegeben werden, die die gleiche Topologie wie d erzeugen.

H3.4 **Abstraktion des Beweises der Minkowskiungleichung.** Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. $V' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ bezeichne den Dualraum von V, also die Menge aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K}$ (synonym: Linearformen auf V). Weiter sei $\mathcal{B} \subseteq V'$ eine nichtleere Menge von Linearformen, und es gelte für alle $x \in V$:

$$\|x\| = \sup\{|H(x)| \mid H \in \mathcal{B}\}.$$

Beweisen Sie, dass $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf V ist.

H3.5 **Leseaufgabe.** Studieren Sie die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ im Beweis von Korollar 1.22 im Skript.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 16.05.2017, 10:15 Uhr.

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 3 – Tutorien

T3.1 **Metrik zur Standardtopologie auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.** Geben Sie eine Metrik auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ an, die die aus der Analysis 1 bekannte Topologie auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ erzeugt.

T3.2 **Integralversion der Hölder-Ungleichung.** Für $1 \le p < \infty$ und $f \in C([a,b],\mathbb{K})$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ definieren wir

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Wir definieren auch:

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid a \le x < b\} \text{ für } f \in C([a,b],\mathbb{K})$$

Zeigen Sie für konjugierte $p, q \in [1,\infty]$ und für $f, g \in C([a,b],\mathbb{K})$:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \|f\|_p\|g\|_q.$$

Imitieren Sie dazu den Beweis der Hölder-Ungleichung in ℓ^p.

T3.3 **Gleichheit in der Hölder-Ungleichung in ℓ^p.** Es seien I eine abzählbare Menge, $p, q \in]1,\infty[$ konjugiert zueinander, $f \in \ell^p(I)$, $f \neq 0$, und $g \in \ell^q(I)$. Zeigen Sie, dass folgende beiden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\sum_{j\in I} f(j)g(j) = \|f\|_p\|g\|_q$

(b) Es gilt $g = \alpha h$ für ein $\alpha \ge 0$ mit

$$h \in \mathbb{K}^I, \quad h(j) := \begin{cases} |f(j)|^{p-2}\overline{f(j)} & \text{für } f(j) \neq 0, \\ 0 & \text{für } f(j) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

T3.4 **Zusammenhang des Einheitsintervalls.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt zusammenhängend, falls für alle $U \in \mathcal{T}$ mit $X \setminus U \in \mathcal{T}$ gilt: $U = \emptyset$ oder $U = X$. Beweisen Sie, dass das Einheitsintervall $[0,1]$, versehen mit der Standardtopologie, zusammenhängend ist.
Hinweis: Angenommen, wir finden $U \in \mathcal{T}$ mit $X \setminus U \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset$ und $U \neq [0,1]$. Betrachten Sie

$$x := \sup\{y \in [0,1] \mid [0,y] \subseteq U \ \vee \ [0,y] \subseteq [0,1] \setminus U\}$$

und führen Sie sowohl die Annahme $x \in U$ als auch die Annahme $x \notin U$ zu einem Widerspruch.