LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 2 – Hausaufgaben

H2.1 **Ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}[x]$.** Es sei $V = \mathbb{C}[x]$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Polynome in der Variablen x mit komplexen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}, \quad \langle p, q \rangle := \int_0^\infty \overline{p(x)} q(x) e^{-x} \, dx$$

eine Sesquilinearform auf V gegeben wird, die $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zu einem Prähilbertraum macht. Vergessen Sie dabei nicht zu zeigen, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wohldefiniert und positiv definit, nicht nur positiv semidefinit, ist.

H2.2 **Halbnormen aus spiegelsymmetrischen konvexen Mengen.** Es seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $K \subseteq V$ eine konvexe Menge mit $0 \in K$. Die Menge K sei spiegelsymmetrisch um 0, d.h. es gelte $v \in K \Leftrightarrow -v \in K$ für alle $v \in V$. Wir definieren

$$\| \cdot \| : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad \|x\| = \inf \left\{ \frac{1}{\lambda} \,\middle|\, \lambda > 0,\ \lambda x \in K \right\}.$$

(Erinnerung: $\inf \emptyset = +\infty$) Es gelte $\|x\| < +\infty$ für alle $x \in V$. Beweisen Sie:

(a) $\| \cdot \|$ ist eine Halbnorm auf V.

(b) Es gilt:

$$\{x \in V | \ \|x\| < 1\} \subseteq K \subseteq \{x \in V | \ \|x\| \leq 1\}$$

Versuchen Sie, sich $\| \cdot \|$ in den Fällen $K = [-1, 1]^2$, $K = [-1, 1] \times \mathbb{R}$ und $K = [-1, 1] \times \{0\}$ anschaulich vorzustellen; hierzu brauchen Sie nichts aufzuschreiben.

H2.3 **Wie die ∞-Norm zu ihrem Namen kommt.** Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathbb{C}^n$:

$$\|f\|_p \overset{p \to \infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty.$$

H2.4 **Fortsetzung von Aufgabe T2.4.** Wir verwenden die Bezeichnungen aus Aufgabe T2.4 weiter.

(a) Beweisen Sie die folgende "Dualitätsrelation":

$$B = \bigcap_{y \in B^*} H_y.$$

Versuchen Sie, sich diese Relation mit Skizze I geometrisch vorzustellen.

(b) Beweisen Sie:

$$B^* = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | \ |y_1|^{3/2} + |y_2|^{3/2} \leq 1\}$$

(c) Skizzieren Sie B^* in Skizze I*. Markieren Sie den Punkt v^* in Skizze I* in blauer Farbe.

(d) Skizzieren Sie die Halbebene H_v in Skizze I* in grüner Farbe. Beachten Sie bitte, dass der Rand dieser Halbebene und der Rand der Menge B^* sich im Punkt v^* tangential berühren.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 09.05.2017, 10:15 Uhr.

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 2 – Tutorien

T2.1 **Veranschaulichung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.** Gegeben seien die Vektoren $x = (1,7)$ und $y = (8,6)$ in $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $u = x - \frac{\langle y,x\rangle}{\|y\|^2}y$, wobei das Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\mathbb{R}^2$ und die zugehörigen Norm $\|\cdot\|$ gemeint sind. Veranschaulichen Sie sich x, y, $\frac{\langle y,x\rangle}{\|y\|^2}y$ und u mit einer Graphik. Veranschaulichen Sie mit der Graphik auch den Restterm $\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2$ der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

T2.2 **Einheitsbälle sind konvex.** Eine Teilmenge $K \subseteq V$ eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V wird *konvex* genannt, wenn für alle $x, y \in K$ und alle $t \in [0,1]$ gilt: $(1-t)x + ty \in K$. Beweisen Sie: Ist $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm, so ist $\{x \in V |\ \|x\| \leq 1\}$ konvex.

T2.3 **Beispiel einer Halbnorm, die keine Norm ist.** Es sei $V := \mathcal{R}[0,1]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Riemann-integrierbaren Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(a) Beweisen Sie, dass durch

$$\|\cdot\|_1 : V \to \mathbb{R}, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

eine Halbnorm auf V definiert ist, die keine Norm ist. Geben Sie dazu ein $f \in V \setminus \{0\}$ mit $\|f\|_1 = 0$ explizit an.

(b) Es sei $N = \{f \in V |\ \|f\|_1 = 0\}$ und $V/N = \{v + N|\ v \in V\}$ der zugehörige Quotientenraum und $k : V \to V/N$, $k(v) = v + N$ die kanonische Abbildung. Weiter sei $I : V \to \mathbb{R}$, $I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$ die Integralabbildung. Beweisen Sie, dass es eine eindeutige lineare Abbildung $J : V/N \to \mathbb{R}$ mit $I = J \circ k$ gibt.

T2.4 **Konvexe Dualität am Beispiel der $\|\cdot\|_3$-Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$.** In dieser Aufgabe und ihrer Fortsetzung H2.4 sollen Sie zwei *getrennte, aber doch zusammengehörende* Skizzen ("Skizze I" und "Skizze I*") anfertigen, die man sich auch als Darstellungen in $\mathbb{R}^2$ und dessen Dualraum $(\mathbb{R}^2)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vorstellen kann. Bitte stellen Sie daher beide Skizzen untereinander auf dem gleichen Blatt dar. Einander entsprechende Objekte in beiden Skizzen sollen gleiche Farben erhalten. Empfohlene Längeneinheit für beide Skizzen: 4cm.

(a) Beweisen Sie: Die Menge $B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ |x_1|^3 + |x_2|^3 < 1\}$ ist konvex.

(b) Stellen Sie die Menge B graphisch in Skizze I dar. Markieren Sie den Punkt $v := (\frac{1}{2}, \frac{7^{1/3}}{2}) \notin B$ im Rand von B in Skizze I in grüner Farbe.

(c) Für $y \in \mathbb{R}^2$ definieren wir die Menge

$$H_y := \{x \in \mathbb{R}^2 |\ \langle y, x\rangle < 1\},$$

wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\langle(y_1, y_2), (x_1, x_2)\rangle = y_1x_1 + y_2x_2$ das euklidische Skalarprodukt bezeichnet. Für $y \neq 0$ ist also H_y eine Halbebene. Zeigen Sie: Für den Punkt $v^* := (\frac{1}{4}, \frac{7^{2/3}}{4}) \in \mathbb{R}^2$ gilt $B \subseteq H_{v^*}$ und $\langle v^*, v\rangle = 1$, also $v \notin H_{v^*}$.

(d) Stellen Sie die Halbebene H_{v^*} in Skizze I in blauer Farbe dar. Beachten Sie bitte, dass der Rand dieser Halbebene und der Rand der Menge B sich im Punkt v tangential berühren.

(e) Es sei

$$B^* = \{y \in \mathbb{R}^2 |\ B \subseteq H_y\}.$$

Beweisen Sie, dass B^* konvex ist.