LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 14 – Hausaufgaben

H14.1 **Funktionen mit Ableitung 0.**

(a) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $df = 0$. Zeigen Sie, dass f *lokal konstant* ist, d.h. dass es für alle $x \in U$ eine Umgebung $V \subseteq U$ von x gibt, so dass die Einschränkung $f|_V$ von f auf V konstant ist.

(b) Folgern Sie, dass f konstant ist, falls U *zusammenhängend* ist, d.h. falls es keine Zerlegung $U = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ von U in zwei nichtleere, disjunkte offene Mengen U_1 und U_2 gibt.

(c) Zeigen Sie, dass U zusammenhängend ist, wenn je zwei Punkte $x, y \in U$ durch eine stetige Kurve $k : [0,1] \to U$, $k(0) = x$, $k(1) = y$, verbunden werden können.

H14.2 **Integration einer exakten 1-Form entlang verschiedener Pfade.** Finden Sie eine Stammfunktion f der exakten 1-Form

$$\omega = 2xy\,dx + x^2\,dy$$

auf $\mathbb{R}^2$ auf drei verschiedene Weisen, indem Sie vom Referenzpunkt $(0,0)$ zum Punkt (x,y) über folgende Kurven integrieren:

a) auf der direkten Verbindungsstrecke k_1 von $(0,0)$ nach (x,y);

b) auf dem Polygonzug k_2, der durch Zusammenfügen der Verbindungsstrecke k_{2a} von $(0,0)$ nach $(x,0)$ und der Verbindungsstrecke k_{2b} von $(x,0)$ nach (x,y) entsteht;

c) auf dem Polygonzug k_3, der durch Zusammenfügen der Verbindungsstrecke k_{3a} von $(0,0)$ nach $(0,y)$ und der Verbindungsstrecke k_{3b} von $(0,y)$ nach (x,y) entsteht.

Skizzieren Sie die Bilder der Kurven k_1, k_2 und k_3 in der Ebene.

H14.3 **Lokale Stammfunktionen der Windungsform.** Gegeben seien die 1-Form

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \in Z^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

und deren Einschränkungen $\omega|_{U_1}$ bzw. von $\omega|_{U_2}$ auf die "geschlitzten Ebenen"

$$U_1 := \mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty, 0] \times \{0\})$$
$$U_2 := \mathbb{R}^2 \setminus ([0, +\infty[\times \{0\})$$

Zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass

$$\Phi_1 : U_1 \to]-\pi, \pi[, \quad \Phi_1(x,y) = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}},$$
$$\Phi_2 : U_2 \to]-\pi, \pi[, \quad \Phi_2(x,y) = 2 \arctan \frac{y}{x - \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Stammfunktionen von $\omega|_{U_1}$ bzw. von $\omega|_{U_2}$ sind:

$$d\Phi_1 = \omega|_{U_1}, \quad d\Phi_2 = \omega|_{U_2}.$$

Überlegen Sie sich mit elementargeometrischen Methoden, dass $\Phi_1(x,y)$ der Winkel zwischen der positiven x-Achse und dem Strahl von $(0,0)$ nach (x,y) ist, während $\Phi_2(x,y)$ der Winkel zwischen der negativen x-Achse und dem Strahl von $(0,0)$ nach (x,y) ist. Folgern Sie, dass $\Phi_1 - \Phi_2 : U_1 \cap U_2 \to \mathbb{R}$ lokal konstant ist, genauer

$$\Phi_1(x,y) - \Phi_2(x,y) = \begin{cases} \pi & \text{für } x \in \mathbb{R},\ y > 0, \\ -\pi & \text{für } x \in \mathbb{R},\ y < 0. \end{cases}$$

Bitte wenden!

H14.4 **1. Kohomologie einer zweifach gelochten Ebene.** Zeigen Sie, dass $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0),(-1,0)\})$ ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis

$$\left[\frac{y\,dx - (x-1)\,dy}{(x-1)^2 + y^2}\right], \left[\frac{y\,dx - (x+1)\,dy}{(x+1)^2 + y^2}\right]$$

ist.
Hinweis: Betrachten Sie zu gegebenem $\chi \in Z^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0),(-1,0)\})$ Stammfunktionen der Einschränkungen auf die sternförmigen Mengen $U_1 = \mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty, 1] \times \{0\})$, $U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus ([-1, +\infty[\times \{0\})$ und $U_3 = \mathbb{R}^2 \setminus ((\mathbb{R} \setminus]-1,1[) \times \{0\})$. Gehen Sie damit analog zum Beweis von Satz 2.125 im Skript (1. Kohomologie von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$) vor.

H14.5 **Leseaufgabe.** Lesen und verstehen Sie Korollar 2.85, betreffend den Begriff des Tangentialraums, im Skript.

Abgabe: Zusammengeheftet mit den Bearbeitungen der anderen Hausaufgaben in der Übungsmappe bei der Klausur am 12.8.2017.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 14 – Tutorien

T14.1 **Kurvenintegrale bei exakten und nicht exakten 1-Formen.** Gegeben seien die folgenden beiden 1-Formen über $\mathbb{R}^2$: $\omega_{(x,y)} = 3x^2 y\,dx + x^3\,dy$ und $\chi_{(x,y)} = y\,dx - x\,dy$ sowie die folgenden drei Pfade:

- C_1 sei die Verbindungsstrecke von $(0,0)$ nach $(1,1)$.
- C_2 sei das Kurvenstück von $(0,0)$ nach $(1,1)$ auf der Normalparabel, die durch die Gleichung $y = x^2$ beschrieben wird.
- C_3 sei der Polygonzug von $(0,0)$ über $(1,0)$ nach $(1,1)$.

(a) Berechnen Sie die Integrale $\int_{C_j} \omega$ und $\int_{C_j} \chi$ für $j = 1, 2, 3$. Beobachten Sie, ob die Integrale vom Pfad abhängen.

(b) Welche der beiden Formen ω, χ sind geschlossen? Welche davon sind exakt? Geben Sie im Fall einer exakten Form eine Stammfunktion an.

T14.2 **Rückzug ist funktoriell.** Es seien $l, m, n \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^l$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen und $f : U \to V$, $g : V \to W$ differenzierbare Abbildungen, sowie $\omega : W \to (\mathbb{R}^n)'$ eine 1-Form. Zeigen Sie:

(a) $f^*(g^*\omega) = (g \circ f)^*\omega$

(b) $\mathrm{id}_W^*\,\omega = \omega$

T14.3 **Richtungsumkehr bei Kurvenintegralen.** Überlegen Sie sich, dass sich nur das Vorzeichen eines Kurvenintegrals $\int_C \omega$ ändert, wenn man die Durchlaufrichtung der Kurve C umdreht.

T14.4 **Herunterspezialisieren des Poincaré-Lemmas für 1-Formen und Homotopien zum Poincaré-Lemma für sternförmige Gebiete.** Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet mit Zentrum 0 und $h : [0,1] \times V \to V$, $h(t,x) = tx$. Berechnen Sie für $\omega = \sum_{j=1}^n \alpha_j\,dx_j \in Z^1(V)$ die Stammfunktion $f := I_V h^*\omega$ von ω, wobei die Abbildung $I_V : Z^1([0,1] \times V) \to C^\infty(V, \mathbb{R})$ im Skript vor dem Poincaré-Lemma, Satz 2.131, definiert ist. Vollziehen Sie damit den Beweis von $df = \omega$ nach, herunterspezialisiert auf den Fall dieser Homotopie h. Sie rekonstruieren damit den Beweis des Poincaré-Lemmas für sternförmige Gebiete als Spezialfall des Beweises des Poincaré-Lemmas für glatt zusammenziehbare Gebiete.