LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 13 – Hausaufgaben

H13.1 *Aus der Klausur zur Analysis 2 des Sommersemesters 2013:*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

sowie $M = \{x \in \mathbb{R}^4 | \ f(x) = f(1, 1, 1, 1)\}$ das Niveaugebilde von f durch den Punkt $(1, 1, 1, 1)$.

(a) Entscheiden Sie mit Begründung, ob $0 \in \mathbb{R}^4$ ein lokales Minimum von f ist.

(b) Beweisen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$ ist. Welche Dimension hat M?

(c) Beweisen Sie, dass M kompakt ist.

(d) Formulieren Sie den Satz von den Lagrange-Multiplikatoren.

(e) Finden Sie eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{j=1}^4 \beta_j x_j$ mit

$$g(1, 1, 1, 1) = \sup g[M] = 1.$$

Geben Sie $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ an und begründen Sie Ihr Ergebnis.

H13.2 **Eine global implizit definierte Funktion.** Zeigen Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz und dem Satz von den impliziten Funktionen, dass durch das Gleichungssystem

$$g_1(x_1, x_2) = \frac{1}{10} \arctan(g_1(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2) + x_1)$$
$$g_2(x_1, x_2) = \frac{1}{20} \arctan(g_1(x_1, x_2) - g_2(x_1, x_2) + x_2)$$

eine eindeutige glatte Funktion $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *global* implizit definiert wird. Berechnen Sie $dg_1(0, 0)$ und $dg_2(0, 0)$.

H13.3 **Tangentialebene an ein Ellipsoid.**

(a) Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ das durch die Gleichung

$$x^2 + 4xy + 2xz + 7y^2 - 2yz + 6z^2 = 18$$

beschriebene Ellipsoid. Berechnen Sie den "geometrischen Tangentialraum" $p + T_pM$ von M im Punkt $p = (1, 1, 1)$. Schreiben Sie $p + T_pM$ als ein geeignetes Niveaugebilde.

(b) Berechnen Sie die Tangente im gleichen Punkt p der Ellipse, die durch den Schnitt von M mit der durch die Gleichung

$$2x - y - z = 0$$

beschriebenen Ebene entsteht. Geben Sie die Tangente durch eine Parametrisierung mit der ersten Koordinate x an.

H13.4 **Die spezielle lineare Gruppe.** Zeigen Sie:

(a) Die reelle "*spezielle lineare Gruppe*"

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | \ \det A = 1\}$$

bildet eine Hyperfläche (also eine 1-kodimensionale Untermannigfaltigkeit) in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Zeigen Sie ebenso, dass die komplexe spezielle lineare Gruppe

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} | \ \det A = 1\}$$

eine reell 2-kodimensionale Untermannigfaltigkeit des $2n^2$-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}^{n\times n}$ bildet.

H13.5* **Die unitäre Gruppe und die Lorentzgruppe als Untermannigfaltigkeiten.** Zeigen Sie:

(a) Die "*unitäre Gruppe*" zu $n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} |\ A^*A = \mathrm{Id}\} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} |\ \forall x \in \mathbb{C}^n : \|Ax\|_2 = \|x\|_2\}$$

bildet eine n^2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $2n^2$-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}^{n\times n}$. Hierbei bedeutet $A^* = \overline{A}^t$ die hermitesch konjugierte Matrix zu A, also die elementweise konjugiert komplex und transponiert genommene Matrix zu A.
Hinweis: Betrachten Sie den n^2-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$V = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} |\ A = A^*\}$$

der *hermiteschen Matrizen* und für eine *unitäre Matrix* $X_0 \in \mathrm{U}(n)$ die Abbildung

$$f : \mathbb{C}^{n\times n} \to V, \quad f(X) = X_0X^*XX_0^*.$$

(b) Es sei $G = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Die "*Lorentzgruppe*"

$$\mathrm{O}(1, 3) := \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} |\ A^tGA = G\}$$

bildet eine 6-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{4\times 4}$.
Hinweis: Betrachten Sie den 10-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$V = \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} |\ A^t = A\}$$

der symmetrischen reellen 4×4-Matrizen und für eine Matrix $X_0 \in \mathrm{O}(1, 3)$ die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{4\times 4} \to V, \quad f(X) = (X_0^{-1})^tX^tGXX_0^{-1}.$$

Die linearen Abbildungen $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $x \mapsto Lx$ mit $L \in \mathrm{O}(1, 3)$ werden *Lorentztransformationen* genannt und spielen in der speziellen Relativitätstheorie von Albert Einstein eine zentrale Rolle.

H13.6* **C^p-Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten.**

(a) Es seien U und U' zwei endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, $M \subseteq U$ und $M' \subseteq U'$ zwei C^p-Untermannigfaltigkeiten, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Weiter sei $f : M \to M'$ eine Abbildung. Wir nennen die Abbildung f *p-fach stetig differenzierbar*, in Zeichen $f \in C^p(M, M')$, wenn es für jedes $x \in M$ eine offene Umgebung U_1 von x in U und eine C^p-Fortsetzung $F : U_1 \to U'$ von $f|_{U_1\cap M}$ gibt. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung $dF_x|_{T_xM} : T_xM \to U'$ den Tangentialraum T_xM in den Tangentialraum $T_{f(x)}M'$ abbildet und dass die Abbildung

$$df_x := dF_x|_{T_xM} : T_xM \to T_{f(x)}M'$$

nicht von der Wahl von F abhängt. Wir nennen df_x die *Linearisierung* oder auch *Ableitung* von f bei x.

(b) Es seien $f : M \to M'$ und $g : M' \to M''$ p-fach stetig differenzierbare Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten endlichdimensionaler Vektorräume. Zeigen Sie folgende Variante der Kettenregel für $x \in M$:

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x.$$

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 25.7.2017, 10:15 Uhr.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 13 – Tutorien

T13.1 *Aus der Nachklausur zur Analysis 2 des Sommersemesters 2013:*

(a) Formulieren Sie eine Version des Satzes von den impliziten Funktionen. Geben Sie dabei insbesondere die Ableitungsformel für implizit definierte Funktionen an.

(b) Gegeben sei eine feste $n \times n$-Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei $n \in \mathbb{N}$, und die Abbildung $g : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $g(X) = XBX^{-1}$. Dabei bezeichnet $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} |\ \det X \neq 0\}$ die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen. Der Funktionswert $Y = g(X)$ kann auch implizit durch die Gleichung $YX - XB = 0$ definiert werden. Berechnen Sie den Wert der Ableitung $dg_{\mathrm{Id}}(A)$ mit Hilfe des Satzes von den impliziten Funktionen. Hierbei bezeichnet $\mathrm{Id} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige Matrix.

T13.2 *Aus der Nachklausur zur Analysis 2 des Sommersemesters 2013:*

Gegeben sei die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 3, (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 3\}$$

und die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 2x + y + z$.

(a) Beweisen Sie, dass M kompakt ist.

(b) Beweisen Sie, dass M eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

(c) Formulieren Sie den Satz von den Lagrange-Multiplikatoren.

(d) Berechnen Sie $\max_{(x,y,z)\in M} f(x, y, z)$. Geben Sie auch die Stelle $(x, y, z) \in M$ an, an der dieses Maximum angenommen wird.

T13.3 *Aus der Klausur zur Analysis 2 des Sommersemesters 2013:*

(a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

(b) Gegeben sei eine glatte Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$k := \sup_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) \right| < 1.$$

Beweisen Sie, dass die Integralgleichung

$$g(x) = \int_0^x f(x, y, g(y))\, dy \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1$$

genau eine Lösung $g \in C([0, 1], \mathbb{R})$ besitzt.
Hinweis: Sie können hierbei mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ arbeiten.

T13.4 *Aus der Klausur zur Analysis 2 des Sommersemesters 2013:*

(a) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Stone-Weierstraß.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $M = \{g_\lambda |\ \lambda \geq 0\}$ der Funktionen $g_\lambda : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g_\lambda(x) = e^{\lambda x}$, einen bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ dichten Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $C([0, 1], \mathbb{R})$ aufspannt.

(c) Gegeben sei eine stetige Funktion $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi_f : (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad \phi_f(g) = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$$

stetig ist.

(d) Folgern Sie: Ist $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\forall \lambda \geq 0 : \int_0^1 f(x)e^{\lambda x}\, dx = 0,$$

so gilt $f = 0$. *Hinweis:* Es wird empfohlen, bei dieser Teilaufgabe die vorhergehenden Teilaufgaben (b) und (c) zu verwenden.