LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 12 – Hausaufgaben

H12.1 **Quadratische Ergänzung.**

(a) Studieren Sie das Varfahren 2.51 im Skript (Quadratische Ergänzung, Cholesky-Zerlegung), mit dem man entscheiden kann, ob eine gegebene symmetrische Matrix positiv definit ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 8 & -4 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist, indem Sie ihre Cholesky-Zerlegung berechnen.

H12.2 **Vergleich verschiedener Tests auf positive Definitheit.** Entscheiden Sie für folgende Matrizen

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ob sie positiv definit sind

(i) indem Sie das charakteristische Polynom ausrechnen und entscheiden, ob alle Nullstellen davon positiv sind,

(ii) mit Vorzeichen von Unterdeterminanten,

(iii) mit quadratischer Ergänzung.

H12.3 **Optionspreise im Black-Scholes-Modell.** Eine "*europäische Call-Option*" ist ein Finanzderivat, das seinem Inhaber das Recht, aber nicht die Pflicht gibt, zu einem vereinbarten zukünftigen Zeitpunkt T eine Einheit eines vereinbarten "Basiswerts" (z.B. einer Aktie, einer Währung, eines Rohstoffs) zu einem vereinbarten Preis K zu kaufen. Die Option verfällt damit wertlos zur Zeit T, wenn der Marktpreis S_T des Basiswerts zur Zeit T kleiner oder gleich K ist; andernfalls hat sie dann den Wert $S_T - K$. Zur Zeit T besitzt die Call-Option also den Wert $\max\{S_T - K, 0\}$. Der Preis C einer solchen Call-Option zu einer früheren Zeit $t < T$ wird vom Wert S des Basiswerts zu dieser Zeit abhängen: $C = C(t, S)$. Betrachten wir den mit dem Marktzins r diskontierten Optionspreis

$$L(t, x) := e^{-rt} C(t, S)$$

in Abhängigkeit vom logarithmierten diskontierten Basiswertpreis

$$x := \log(e^{-rt} S).$$

In einem berühmten finanzmathematischen Modell, dem *Black-Scholes Modell*, wird der diskontierte Preis L durch die *Rückwärts-Wärmeleitungsgleichung mit Drift*

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

für $t < T$ und $x \in \mathbb{R}$ beschrieben. Hierbei ist $\sigma > 0$ ein Modellparameter, die "*Volatilität*" des Basiswerts, der das Ausmaß der stochastischen Fluktuationen des Basiswerts quantifiziert. (Die zugrundeliegenden Modellannahmen und eine Herleitung der Gleichung (1) aus diesen Annahmen mit Methoden der Stochastik können Sie in Vorlesungen zur stochastischen Analysis und Finanzmathematik lernen.)

(a) **Driftentfernung, Zeitskalierung und Zeitumkehr.** Zeigen Sie, dass mit der affin-linearen Transformation

$$f(\tilde{t},\tilde{x}) := L(T-\sigma^{-2}\tilde{t},\tilde{x}+\tilde{t}/2) \quad \text{mit } \tilde{t}>0, \tilde{x}\in\mathbb{R}$$

die obige Rückwärts-Wärmeleitungsgleichung (1) äquivalent zur einfachen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}^2}$$

wird.

(b) **Black-Scholes Differentialgleichung.** Folgern Sie aus der Rückwärts-Wärmeleitungsgleichung (1) die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0.$$

Sie wird "Black-Scholes Differentialgleichung" genannt.

(c) **Black-Scholes-Preise europäischer Call-Optionen.** Finden Sie eine Lösung $C(t,S)$, $t<T$, $S>0$ der Black-Scholes Differentialgleichung mit der Randbedingung

$$C(t,S) \to \max\{S_T-K,0\} \text{ für } (t,S)\to(T,S_T),\ t<T,$$

indem Sie die Lösung

$$f(\tilde{t},\tilde{x}) = ce^{\tilde{x}+\frac{\tilde{t}}{2}}\Phi(\tilde{t}^{-1/2}(\tilde{x}+\tilde{t}-\log\tilde{K})) - \tilde{K}\Phi(\tilde{t}^{-1/2}(\tilde{x}-\log\tilde{K}))$$

der Wärmeleitungsgleichung aus Aufgabe H11.6 mit geeigneten Konstanten c und $\tilde{K}$ transformieren. Überprüfen zur Probe mit einer direkten Rechnung, dass Ihr Ergebnis wirklich die Black-Scholes Differentialgleichung löst.

(d) **Veranschaulichung des Ergebnisses.** Veranschaulichen Sie sich diese Optionspreise $C(t,S)$ im Black-Scholes-Modell für den Fall $r=0$, $T=0$, $\sigma=1$ und $K=1$, indem Sie den Graphen von $S\mapsto C(t,S)$ für verschiedene $t<0$ in ein einziges S-C-Diagramm skizzieren. (Eine qualitative Skizze genügt.)

H12.4 **Ableitung und Taylorentwicklung der Determinante.** Betrachten Sie die Determinantenabbildung $\det:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Determinantenabbildung bei der Einheitsmatrix Id durch die Spur

$$d\det_{\mathrm{Id}}(A) = \operatorname{Spur} A$$

für $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben wird.
Erinnerung: Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe der Diagonaleinträge.

(b) Folgern Sie für $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det B\neq 0$:

$$d\det_B(A) = \operatorname{Spur}(B^{-1}A)\det B$$

(c*) Entwickeln Sie $\det:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ bei der Einheitsmatrix Id in ein Taylorpolynom vom Grad n. Zeigen Sie damit die Formel

$$\det(\mathrm{Id}+tA) = 1+\sum_{k=1}^{n} t^k \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,n\}\\ |I|=k}} \det A_{I,I}.$$

für $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $t\in\mathbb{R}$. Hierbei bezeichnet $|I|$ die Anzahl der Elemente von I und $A_{I,I}$ für eine Matrix $A=(a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ die Untermatrix $A_{I,I}=(a_{i,j})_{i,j\in I}\in\mathbb{R}^{I\times I}$.

Variante der Übung: Falls Sie eine einfachere Version der Aufgabe wünschen, bearbeiten Sie nur den Spezialfall $n=2$ oder $n=3$.

H12.5* **Leseaufgabe.** Lesen und verstehen Sie den Abschnitt 2.8 im Skript über die Räume C_b^1

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 18.7.2017, 10:15 Uhr.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 12 – Tutorien

T12.1 **Multinomialformel.** Zeigen Sie für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $m \in \mathbb{N}_0$ und für $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ die folgende Verallgemeinerung der binomischen Formel:

$$(h_1 + \ldots + h_n)^m = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = m}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} h^\alpha.$$

T12.2 **Stationäre Punkte und lokale Extrema.** Finden Sie alle stationären Punkte der Funktionen

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = ((x + y)^2 - 1)^2 + (x - y)^2$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = 2(x + y)^3 - 3(x + y)^2 + y^2$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \operatorname{Re} \cos(x + iy)$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \operatorname{Im} \cos(x + iy)$.

und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um lokale Minima, lokale Maxima oder um Sattelpunkte handelt. Skizzieren Sie jeweils ein Niveaulinienbild der Funktionen (bei (c) für f und g in ein gemeinsames Bild); qualitative Skizzen genügen.

T12.3 **Ableitung der Matrix-Exponentialfunktion.** Es sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie für gegebenes $j \in \mathbb{N}$, dass die Matrix-Potenzfunktion $f : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $f(A) = A^j$ die Ableitung $df_A(B) = \sum_{k=1}^{j} A^{k-1} B A^{j-k}$ für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt.

(b) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ offen und beschränkt. Zeigen Sie, dass die Matrix-Exponentialreihe

$$U \ni A \mapsto \exp(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} A^j$$

in $(C_b^1(U, \mathbb{R}^{n \times n}), \|\cdot\|_{C^1})$ konvergiert, d.h. dass sowohl die Reihe als auch ihre Ableitung über U gleichmäßig konvergiert.

(c) Folgern Sie für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$d \exp_A(B) = \int_0^1 e^{tA} B e^{(1-t)A}\, dt.$$

Insbesondere gilt $d \exp_{\mathrm{Id}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n \times n}}$.

Bitte wenden!

T12.4 **Asymptotik der Riemannschen Zetafunktion nahe bei 1.**

(a) Gegeben seien ein kompaktes Rechteck $M = [n, n+1] \times [1, s] \subset \mathbb{R}^2$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $s > 1$, und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$; Differenzierbarkeit am Rand ist einseitig gemeint. Zeigen Sie:

$$f(n, s) - \int_n^{n+1} f(x, s)\, dx - f(n, 1) + \int_n^{n+1} f(x, 1)\, dx = -\int_n^{n+1} \int_n^x \int_1^s D_1 D_2 f(y, t)\, dt\, dy\, dx$$

(b) Wenden Sie dies auf $f(x, s) = x^{-s}$ an, um Folgendes zu beweisen:

$$n^{-s} - \frac{(n+1)^{1-s} - n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{n} + \log(n+1) - \log n = \int_n^{n+1} \int_n^x \int_1^s (1 - t \log y) y^{-t-1}\, dt\, dy\, dx$$

(c) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{y \in [n, n+1]} \sup_{t \in [1,2]} |(1 - t \log y) y^{-t-1}| \le 2(\log(n+1) + 1) n^{-2}$$

Folgern Sie für $1 < s \le 2$:

$$\left| n^{-s} - \frac{(n+1)^{1-s} - n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{n} + \log(n+1) - \log n \right| \le (s-1)(\log(n+1) + 1) n^{-2}$$

(d) Summieren die Formel in (b) über $n \in \mathbb{N}$ und verwenden Sie die Schranke in (c) sowie $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\log(n+1) + 1) n^{-2} < \infty$, um

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1) \text{ für } s \downarrow 1$$

zu zeigen. Hierbei bezeichnet $\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-s}$ die Riemannsche Zetafunktion bei s und

$$\gamma := \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n+1) \right)$$

sie sogenannte “Euler-Mascheroni-Konstante”; die Existenz dieses Limes in $\mathbb{R}$ wurde in in Aufgabe 5(c) der Nachklausur zur Analysis 1 gezeigt; siehe:

`http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~merkl/ws16/ana1/lsg-nachklausur.pdf`