LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 11 – Hausaufgaben

H11.1 **Leseaufgaben.**

(a) Studieren Sie das Gegenbeispiel im Skript, das die Nichtvertauschbarkeit partieller Ableitungen in Ausnahmefällen illustriert, unmittelbar vor dem Lemma 2.13 (Lemma von Schwarz).

(b) Studieren Sie Beispiel 2.20 (partielle Differenzierbarkeit $\not\Rightarrow$ Differenzierbarkeit) und Lemma 2.21 (stetige partielle Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Differenzierbarkeit) inklusive Beweis im Skript.

H11.2 **Rechentraining zum Rückzug.** Berechnen Sie den Rückzug f^*dg für folgende Daten (definiert jeweils auf geeigneten offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^3$):

a) $f(x_1,x_2,x_3) = (y_1,y_2,y_3)$ mit $y_1 = e^{x_1x_2-x_3}$, $y_2 = e^{x_1x_2+x_3}$, $y_3 = e^{x_2x_3}$ und $dg(y_1,y_2,y_3) = y_2y_3\,dy_1 + y_1y_3\,dy_2 + y_1y_2\,dy_3$.

b) $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1/(x_1+x_2+x_3), x_2/(x_1+x_2+x_3), x_1+x_2+x_3) = (y_1,y_2,y_3)$ und $dg(y_1,y_2,y_3) = e^{y_1y_3+2y_2y_3}[y_3\,dy_1 + 2y_3\,dy_2 + (y_1+2y_2)dy_3]$.

Gehen Sie dazu jeweils auf zwei verschiedene Weisen vor:

(a) mit direkter Rechnung durch Anwendung der Adjungierten df^* auf dg,

(b) durch Bestimmen einer Funktion g mit der gegebenen Ableitung dg und Berechnen von $d(g\circ f)$.

Überzeugen Sie sich davon, dass die Ergebnisse von 1. und 2. übereinstimmen.

H11.3 **Integrabilitätsbedingung für Hesse-Matrizen.** Es seien $n\in\mathbb{N}$ und $H = (H_{ij})_{i,j=1,\dots,n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine glatte Abbildung mit Werten im Raum der symmetrischen Matrizen: $H(x) = H(x)^t$ für alle $x\in\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie: Ist $H = D^2 f$ für eine glatte Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, d.h. ist H das Hessematrixfeld einer glatten Funktion, so gilt $D_iH_{jk} = D_jH_{ik}$ für alle $i,j,k\in\{1,\dots,n\}$.

(b) Es gelte umgekehrt $D_iH_{jk} = D_jH_{ik}$ für alle $i,j,k\in\{1,\dots,n\}$. Wir definieren $g_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ für $k=1,\dots,n$ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ wie folgt: Für $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ sei

$$g_k(x) := \sum_{i=1}^n \int_0^1 x_i H_{ik}(\lambda x)\,d\lambda,$$
$$f(x) := \sum_{j=1}^n \int_0^1 x_j g_j(\lambda x)\,d\lambda.$$

Zeigen Sie: $H = D^2 f$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass alle Funktionen g_k und f glatt sind. Gehen Sie in den folgenden Schritten vor: Zeigen Sie für $j,k\in\{1,\dots,n\}$, $\lambda\in[0,1]$ und $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$:

i. $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}[x_iH_{ik}(\lambda x)] = \frac{\partial}{\partial\lambda}[\lambda H_{jk}(\lambda x)]$,

ii. $\displaystyle\frac{\partial}{\partial x_j}g_k(x) = H_{jk}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k}g_j(x)$,

iii. $\displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}[x_jg_j(\lambda x)] = \frac{\partial}{\partial\lambda}[\lambda g_k(\lambda x)]$,

iv. $\displaystyle\frac{\partial}{\partial x_k}f(x) = g_k(x)$.

Bitte wenden!

H11.4 **Kurvenlänge in krummlinigen Koordinaten.** Ein m-dimensionales Gebilde $G \subseteq \mathbb{R}^n$ werde durch eine stetig differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ in Parameterdarstellung $G = f[U]$ gegeben. Weiter sei eine stetig differenzierbare Kurve $k : [a, b] \to U$ gegeben. Wir stellen uns k als eine Beschreibung der Kurve $f \circ k$ "in krummlinigen Koordinaten f" vor. Zeigen Sie, dass die Länge der Kurve $f \circ k$ durch

$$\int_a^b \sqrt{k'(s)^t g(k(s)) k'(s)}\, ds$$

gegeben wird, wobei

$$g : U \to \mathbb{R}^{m\times m}, g(x) = Df(x)^t Df(x).$$

Die matrixwertige Abbildung g wird die *Riemannsche Metrik* zur Parametrisierung f genannt. Berechnen Sie die Riemannsche Metrik für die Polarkoordinatenabbildung $f(r, \phi) = (r \cos\phi, r \sin\phi)$ und für die Kugelkoordinatenabbildung

$$f(r, \theta, \phi) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta).$$

Berechnen Sie damit die Länge der Kurve, die in Polarkoordinaten durch $r(s) = e^s$, $\phi(s) = s$, $s \in [0, 1]$ gegeben wird.

H11.5 **Eine Formel von Heun.** Gegeben sei eine Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ mit einer beliebig oft (partiell) differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und einer beliebig oft differenzierbaren Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Anfangsbedingung $y(0) = b \in \mathbb{R}$ erfüllt. Wir definieren die Näherung $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an y durch

$$z(x) = b + xf(x/2, b + xf(0, b)/2).$$

Beweisen Sie, dass die Taylorpolynome 2. Grades von y und von z um $x_0 = 0$ übereinstimmen.
Bemerkung: Aus dieser Formel und Varianten davon gewinnt man durch Iteration numerische Verfahren zur Berechnung von Näherungslösungen von Differentialgleichungen. Mehr dazu in der Numerischen Mathematik.

H11.6 **Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung.** Gegeben sei die stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \max\{e^x - K, 0\}$ für gegebenes $K > 0$. Weiter sei

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} g(y)\, dy. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass f die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

löst.
Hinweis: Zeigen und verwenden Sie hierzu die Formel

$$f(x, t) = e^{x+\frac{t}{2}} \Phi(t^{-1/2}(x + t - \log K)) - K\Phi(t^{-1/2}(x - \log K))$$

mit der Funktion

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Die Funktion Φ wird auch "*Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung*" genannt.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 11.7.2017, 11:15 Uhr.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 11 – Tutorien

T11.1 Berechnen Sie unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ den Gradienten der Funktion $h : \mathbb{R}^2 \ni (s,t) \mapsto f(s,t)^{g(s,t)} \in \mathbb{R}$. Das Ergebnis darf in Matrixnotation geschrieben werden.

T11.2 *Aus der Klausur zur Analysis 2 des Sommersemesters 2013:*

(a) Formulieren Sie eine Version der Parseval-Gleichung für Fourierreihen.

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion. Beweisen Sie:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\,dx + \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\right|^2$$

Hinweis: Eine Lösung verwendet an geeigneter Stelle partielle Integration.

T11.3 Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \arctan(y/x)$. Berechnen Sie den Rückzug f^*dg der Ableitung von g unter der Polarkoordinatenabbildung

$$f : \mathbb{R}^+ \times \,]-\pi/2, \pi/2[\, \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad (x,y) = f(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$$

auf zwei verschiedene Weisen:

a) indem Sie $g \circ f$ ausrechnen und dann ableiten;

b) indem Sie die Ableitung von g bilden und diese dann mit df^* zurückziehen.

Schreiben Sie die Rechnung jeweils sowohl in Differentialnotation als auch in Matrixnotation. Überzeugen Sie sich davon, dass die Ergebnisse übereinstimmen.

T11.4 *Aus der Nachklausur zur Analysis 2 des Sommersemesters 2013:*

(a) Formulieren Sie die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher inklusive ihrer Voraussetzungen.

(b) Gegeben seien glatte Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sowie $h = f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Es gelte $\Delta f = 0$, $D_1 g_1 = D_2 g_2$ und $D_1 g_2 = -D_2 g_1$, wobei Δ den Laplaceoperator bezeichnet. Zeigen Sie $\Delta h = 0$. *Achten Sie beim Aufschreiben der Rechnung besonders auf die Nachvollziehbarkeit der Schritte.*