LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 10 – Hausaufgaben

H10.1 **Rechentraining zum Gradienten.** Berechnen Sie den Gradienten der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-(x-y)^2/(2z)}$,

(b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle a, x\rangle$ mit gegebenem $a \in \mathbb{R}^n$, wobei $\langle ., .\rangle$ das euklidische Skalarprodukt bezeichnet,

(c) $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_2^\alpha$ mit gegebenem $\alpha \in \mathbb{R}$,

(d) $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\langle a,x\rangle}{\|x\|_2^3}$ mit gegebenem $a \in \mathbb{R}^3$.

H10.2 **Graphische Veranschaulichung einer Linearisierung.** Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, den Punkt $(x_0, y_0) = (3, 4)$ mit dem Wert $z_0 = f(x_0, y_0) = 25$ und die Linearisierung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = z_0 + df_{(x_0,y_0)}(x - x_0, y - y_0)$ von f bei (x_0, y_0). Zeichnen Sie die Niveaulinien von f nahe bei (x_0, y_0) mit einem Zirkel und die Niveaugeraden von g nahe bei (x_0, y_0) mit einem Lineal, z.B. für die Niveaus $z = 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29$. Beobachten Sie, wie die Niveaugeraden von g nahe bei (x_0, y_0) die Niveaukreise von f nahe bei (x_0, y_0) approximieren.

H10.3 **Eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung.** Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ und die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t^n}} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}},$$

Zeigen Sie, dass f die "Wärmeleitungsgleichung"

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \frac{1}{2} \Delta f(x, t)$$

löst, wobei sich hier der Laplaceoperator nur auf $x = (x_1, \dots, x_n)$, nicht jedoch auf t bezieht. Versuchen Sie sich im Fall $n = 1$ anschaulich vorzustellen, dass f "zerfließende Gaußsche Glocken" beschreibt, indem Sie $x \mapsto f(x, t)$ für verschiedene t grob skizzieren.

H10.4 *Aus der Klausur zur Analysis 2 des Sommersemesters 2013:*

(a) Formulieren Sie eine Version der mehrdimensionalen Kettenregel.

(b) Gegeben seien eine glatte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(0) = 0$. Es sei $p(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ das Taylorpolynom 3. Grades von y mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$. Stellen Sie die Koeffizienten c_0, c_1, c_2, c_3 von p mit Hilfe von partiellen Ableitungen $f_\alpha := D^\alpha f(0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$, dar.

H10.5 **Rotationsinvarianz des Laplaceoperators.** Es seien $n \in \mathbb{N}$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, d.h. $U^tU = \mathrm{Id}$ oder äquivalent $\forall x \in \mathbb{R}^n : \; \|Ux\|_2 = \|x\|_2$. Weiter sei $UV := \{Ux|\ x \in V\}$ und $g \in C^2(UV, \mathbb{R})$ und $f : V \to \mathbb{R}$, $f(x) = g(Ux)$. Zeigen Sie für alle $x \in V$: $\Delta f(x) = \Delta g(Ux)$.

Bitte wenden!

H10.6 **Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten.** Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{C})$ und $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g(r, \phi) = f(r\cos\phi, r\sin\phi)$. Zeigen Sie:

$$\Delta f(r\cos\phi, r\sin\phi) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\phi) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}(r,\phi)$$

Bemerkung: Mit mehr Hilfsmitteln können wir später in der Analysis 3 die Transformation des Laplaceoperators in beliebige krummlinige Koordinaten in n Dimensionen recht einfach beschreiben.

H10.7 **Von der Wärmeleitungsgleichung via Fourierreihe zur Besselschen Differentialgleichung.** Es sei $f : \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ eine glatte (d.h. beliebig oft (partiell) differenzierbare) Funktion, so dass $g : (\mathbb{R}^2\setminus\{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g(t, x, y) = e^{-t} f(x, y)$ eine exponentiell abfallende Lösung der Wärmeleitungsgleichung (hier ohne Faktor 1/2)

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t, x, y) = \Delta g(t, x, y)$$

bildet, wobei sich der Laplaceoperator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ nur auf x und y, nicht jedoch auf t beziehen soll.

(a) Zeigen Sie: f löst die “*Helmholtzgleichung*” $\Delta f + f = 0$.

(b) Wir setzen für $k \in \mathbb{Z}$ und $r > 0$:

$$f_k(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\phi} f(r\cos\phi, r\sin\phi)\, d\phi$$

und für $(x, y) = (r\cos\phi, r\sin\phi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:

$$g_k(x, y) := f_k(r)e^{ik\phi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} f(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)\, d\theta.$$

Überzeugen Sie sich, dass die letzte Gleichung gilt. Zeigen Sie für alle (x, y) von eben:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(x, y) = f(x, y).$$

(c) Zeigen Sie für $k \in \mathbb{Z}$, dass auch g_k die Helmholtzgleichung $\Delta g_k + g_k = 0$ erfüllt und folgern Sie, dass f_k die “*Besselsche Differentialgleichung*”

$$r^2 f_k''(r) + r f_k'(r) + (r^2 - k^2) f_k(r) = 0$$

für $r > 0$ erfüllt. Welche Funktionen f_k erhalten Sie im Spezialfall $f(x, y) = i^{-n}e^{ix}$?

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 4.7.2017, 10:15 Uhr.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 10 – Tutorien

T10.1 **Rechentraining zu partiellen Ableitungen.** Berechnen Sie alle ersten partiellen Ableitungen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(a, b, c) = \int_a^b e^{-cx^2}\, dx$. Im Ergebnis darf zwar ein Integral, aber keine Ableitung stehen.

T10.2 *Aus der Klausur zur Analysis 2 des Sommersemesters 2013:*

(a) Gegeben seien zwei normierte Räume $(U, \|\cdot\|_U)$ und $(V, \|\cdot\|_V)$, ein Punkt $x \in U$ und eine Funktion $f : U \to V$. Definieren Sie, wann f differenzierbar an der Stelle x mit der Ableitung df_x genannt wird.

(b) Nun seien $n \in \mathbb{N}$, $U = V = \mathbb{R}^{n\times n}$ der Raum der reellen $n \times n$-Matrizen, versehen mit einer Norm Ihrer Wahl, und $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(A) = A^2$ die Quadratabbildung für Matrizen. Geben Sie für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ den Wert $df_A(B)$ der Ableitung von f an und beweisen Sie dieses Ergebnis *direkt mit Hilfe der Definition aus Teilaufgabe (a), ohne Verwendung von Ableitungsregeln.*

T10.3 **Berechnung eines Laplaceoperators.** Es sei $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_2^{2-d}$, wobei $d \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie $\Delta f = 0$. Insbesondere gilt in drei Dimensionen

$$\Delta \frac{1}{\|x\|_2} = 0.$$

T10.4 **Jacobimatrix einer Koordinatentransformation.** Berechnen Sie die Jacobimatrix $Df(r, \theta, \phi)$ der Transformation von Kugelkoordinaten nach kartesischen Koordinaten

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad f(r, \theta, \phi) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta).$$