LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 1 – Hausaufgaben

H1.1 **Numerische Berechnung von π mit der Arcussinusreihe.**

(a) Beweisen Sie, dass $\binom{n-1/2}{n}$ monoton in $n \in \mathbb{N}_0$ fällt.

(b) Aus der Analysis 1 ist die aus der Arcussinusreihe gewonnene Darstellung der Kreiszahl

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n := \binom{n-\frac{1}{2}}{n} \frac{3}{4^n(2n+1)}$$

bekannt. Beweisen Sie für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$0 \le \pi - \sum_{n=0}^{m-1} a_n \le \binom{m-\frac{1}{2}}{m} \frac{3}{2m+1} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3} a_m$$

(c) Finden Sie mit einem Taschenrechner oder Computer das kleinste $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{4}{3}a_m \le 10^{-4}$ und berechnen Sie für dieses m die Näherung $\sum_{n=0}^{m-1} a_n$ an π mit Taschenrechnergenauigkeit.

H1.2 **Produktmetrik.** Zeigen Sie: Sind (M_i, d_i), $i = 1, \dots, n$, halbmetrische Räume, so wird eine Halbmetrik auf dem kartesischen Produkt $M = M_1 \times \dots \times M_n$ wie folgt definiert:

$$d : M \times M \to \mathbb{R}, \quad d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \max_{i=1,\dots,n} d_i(x_i, y_i).$$

Sind alle d_i Metriken, so ist auch d eine Metrik. Sie wird *Produkthalbmetrik* bzw. *Produktmetrik* genannt.

H1.3 **Ein Beispiel zur Vertauschung von Integral und Potenzreihe.** Entwickeln Sie das von einem Parameter $a \in]-1, 1[$ abhängige Integral

$$f(a) = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - a\cos x}$$

auf zwei verschiedene Weisen in eine Potenzreihe:

(a) Entwickeln Sie einerseits den Integranden $(1 - a\cos x)^{-1}$ in eine Potenzreihe in a und integrieren Sie die Partialsummen dieser Reihe über $x \in [0, 2\pi]$. Überzeugen Sie sich davon, dass für jedes gegebene $a \in]-1, 1[$ diese Partialsummen gleichmäßig in $x \in [0, 2\pi]$ gegen $(1 - a\cos x)^{-1}$ konvergieren.

(b) Berechnen Sie andererseits das Integral $f(a)$ mit Hilfe einer Eulersubstitution und entwickeln Sie das Ergebnis in eine Potenzreihe in a. Überzeugen Sie sich davon, dass diese Potenzreihe für $-1 < a < 1$ gegen $f(a)$ konvergiert.

Überzeugen Sie sich zum Konsistenzcheck davon, dass Ihre beiden Ergebnisse übereinstimmen.

H1.4 **Integralversion der Dreiecksungleichung.** Es seien $a \le b$ zwei reelle Zahlen, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n : [a, b] \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen und $f : [a, b] \to \mathbb{K}^n$, $f(x) = (f_k(x))_{k=1,\dots,n}$. Wir kürzen ab:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \left(\int_a^b f_k(x)\,dx \right)_{k=1,\dots,n}.$$

Weiter bezeichne $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^n$. Zeigen Sie: Die Abbildung $[a, b] \ni x \mapsto \|f(x)\| \in \mathbb{R}$ ist stetig, und es gilt

$$\left\| \int_a^b f(x)\,dx \right\| \le \int_a^b \|f(x)\|\,dx.$$

Approximieren Sie dazu die Integrale durch Integrale von Treppenfunktionen, also durch Summen, und wenden Sie die Dreiecksungleichung an.

Abgabe: Bis spätestens Dienstag, den 02.05.2017, Abend.

Übungen zur Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Blatt 1 – Tutorien

T1.1 **Fahrzeiten mit der Bahn.** In Quasiland gibt es eine endliche Menge S von Städten und direkte Eisenbahnverbindungen zwischen manchen der Städte, die in beide Richtungen gleich schnell befahren werden. Es bezeichne K die Menge aller Paare (s, s') von Städten $s, s' \in S$, $s \neq s'$, zwischen denen eine direkte Eisenbahnverbindung besteht. Dabei kann man von jeder Stadt zu jeder anderen Stadt fahren, allerdings möglicherweise nur mit Umsteigen. Für $(s, s') \in K$ bezeichne $t(s, s') > 0$ die Fahrzeit von s nach s' auf der direkten Verbindung. Für beliebige $s, s' \in S$ bezeichne $d(s, s')$ die Gesamtfahrzeit von s nach s' entlang der Strecke mit der kürzesten Fahrzeit, Zeiten zum Umsteigen nicht mitgerechnet.

(a) Übersetzen Sie Definition von d in eine mathematische Formelsprache.

(b) Beweisen Sie, dass (S, d) ein metrischer Raum ist.

T1.2 **1-Norm und ∞-Norm.** Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ werden durch

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}, \ \|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

und

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}, \ \|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

zwei Normen auf $\mathbb{K}^n$ definiert.

T1.3 **Vergleich von d_5 mit dem euklidischen Abstand.** Gegeben sei $a_n = \sum_{k=0}^{n} 9 \cdot 10^k$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter bezeichne $d_5 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ die 5-adische Metrik. Beweisen Sie

$$d_5(a_n, -1) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Gilt auch $|a_n - (-1)| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$?

T1.4 **Beschleunigungen vom Karussell aus gesehen.** Ein Punktteilchen bewegt sich in der Ebene $\mathbb{R}^2$; zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ befindet es sich am Ort

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

wobei die Komponenten von $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ glatte (d.h. beliebig oft differenzierbare) Funktionen seien. Der Beschleunigungsvektor des Teilchens zur Zeit t wird als die komponentenweise gebildete zweite Ableitung

$$\ddot{x}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{pmatrix}$$

definiert, wobei die Zeitableitung mit einem Punkt bezeichnet wird. Von einem sich mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega \in \mathbb{R}$ drehenden Karussell aus gesehen befindet sich das Teilchen zur Zeit t am Ort $y(t) = D(-\omega t)x(t)$, wobei

$$D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

die Drehmatrix um einen Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ bezeichnet.

(a) Beweisen Sie $D(\alpha + \beta) = D(\alpha)D(\beta)$ und $D(-\alpha) = D(\alpha)^{-1}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, also $x(t) = D(\omega t)y(t)$ für $t \in \mathbb{R}$.

(b) Beweisen Sie für die komponentenweise gebildeten Zeitableitungen:

$$\frac{d}{dt}D(\omega t) = \omega D(\tfrac{\pi}{2})D(\omega t), \qquad \frac{d^2}{dt^2}D(\omega t) = -\omega^2 D(\omega t).$$

(c) Beweisen Sie die folgende Formel für die vom Karussell aus beobachtete Beschleunigung:

$$\ddot{y}(t) = D(-\omega t)\ddot{x}(t) - 2\omega D(\tfrac{\pi}{2})\dot{y}(t) + \omega^2 y(t)$$

Vom Karussell aus gesehen sieht man also zusätzlich zur gedrehten ursprünglichen Beschleunigung $D(-\omega t)\ddot{x}(t)$ noch eine senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor $\dot{y}(t)$ gerichtete "Coriolisbeschleunigung" $-2\omega D(\frac{\pi}{2})\dot{y}(t)$ und eine radial nach außen gerichteten "Zentrifugalbeschleunigung" $\omega^2 y(t)$.