Übungsblatt 4 zur Wahrscheinlichkeitstheorie

F. Merkl/R. Graf

Abgabe bis 6. Juni 2011, 13:00 Uhr

Aufgabe 13

Es seien Z_n, $n \in \mathbb{N}$, i.i.d. gleichverteilte Zufallsvariablen mit den Werten 1 und -1. Es sei $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n = \sigma(Z_k : 1 \leq k \leq n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ die davon erzeugte Filtration und $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die zugehörige einfache Irrfahrt: $S_n = Z_1 + \ldots + Z_n$, $S_0 = 0$. Es seien weiter $a, m \in \mathbb{N}$ gegeben. Entscheiden Sie mit Begründung, ob die folgenden zufälligen Zeiten Stoppzeiten bzgl. $\mathcal{F}$ sind:

a) $T_1 = \inf\{n \in \mathbb{N} : \ |\{k \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq k \leq n, S_k = a\}| \geq m\}$ sei die Zeit des m-ten Besuchs von $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in a.

b) $T_2 = \sup\{n \in \mathbb{N} : \ S_n = 0, a \notin \{S_0, S_1, \ldots, S_n\}\}$ sei die Zeit des letzten Besuchs von $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in 0 vor dem ersten Besuch von a.

c) $T_3 = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_{n+1} = a\}$ sei die Zeit unmittelbar vor dem ersten Besuch in a.

Aufgabe 14

Es sei $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die einfache Irrfahrt aus der vorhergehenden Aufgabe. Für $a \in \mathbb{Z}$ bezeichne T_a die Zeit des ersten Besuchs von a. Berechnen Sie $E[T_a \wedge T_{-b}]$ für $a, b \in \mathbb{N}$. Folgern Sie: $E[T_a] = \infty$ für $a \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 15

Sei $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ eine Filtration, $(X_t)_{t \in I}$ ein $\mathcal{F}$-Submartingal, f eine monoton steigende, konvexe Funktion, so dass $\forall t \in I : \ E[|f(X_t)|] < \infty$. Zeigen Sie, daß $(f(X_t))_{t \in I}$ wieder ein $\mathcal{F}$-Submartingal ist. Kann man auf die Bedingung "monoton steigend" verzichten?

Aufgabe 16

Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Martingal bzgl. einer Filtration $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Es gebe $M > 0$, so dass $\forall\, n \in \mathbb{N} : |X_{n+1} - X_n| \leq M$. Weiter sei T eine Stoppzeit bzgl. $\mathcal{F}$ mit $E[T] < \infty$. Zeigen Sie:

$$E[X_T] = E[X_0]$$