

Aufgabe 1. Es seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $[0, \infty[$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Wir betrachten das Ereignis

$$B := \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k X_{k+n} > 1 \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Zeigen Sie: $P[B] \in \{0, 1\}$.

Sei $\mathcal{T} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \sigma(X_k : k \geq m)$ die terminale σ -Algebra

zu $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir zeigen: $B \in \mathcal{T}$, also $\forall m \in \mathbb{N} : B \in \sigma(X_k : k \geq m)$.

Sei hierzu $m \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k X_{k+n} > 1 \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k X_{k+n} > 1 \text{ für unendlich viele } n \geq m, n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \bigcap_{l \geq m} \bigcup_{n \geq l} \underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k X_{k+n} > 1 \right\}}_{\substack{\in \sigma(X_{k+n} : k \in \mathbb{N}) \subseteq \sigma(X_k : k \geq l) \subseteq \sigma(X_k : k \geq m) \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ n \geq l \quad \quad \quad l \geq m}} \end{aligned}$$

abzählbare
Mengenoperationen

also $B \in \mathcal{T}$. Weil die $X_n, n \in \mathbb{N}$, unabhängig sind,

folgt aus dem 0-1-Gesetz von Kolmogoroff: $P[B] \in \{0, 1\}$.

Aufgabe 2. In einer Urne befinden sich zunächst eine blaue und eine rote Kugel. Jemand führt folgendes Zufallsexperiment aus, das aus unendlich vielen Runden $n = 1, 2, \dots$ besteht: In der n -ten Stufe zieht man zufällig eine Kugel aus der Urne. Ist die Kugel blau, legt man sie zusammen mit *einer* neuen blauen Kugel zurück in die Urne. Ist die Kugel rot, legt man sie zusammen mit *zwei* neuen roten Kugeln zurück in die Urne. Es sei R_n bzw. B_n die Anzahl roter bzw. blauer Kugeln nach der n -ten Runde. Weiter bezeichne $X_n = R_n / (R_n + B_n)$ den Anteil roter Kugeln nach der n -ten Runde. Zeigen Sie: Mit Wahrscheinlichkeit 1 existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$.

Es sei $Z_n = \begin{cases} 1, & \text{falls im } n\text{-ten Schritt eine rote Kugel gezogen wird} \\ 0, & \text{" " " " " " " blaue " " " " } \end{cases}$

$$\text{also } R_n = R_{n-1} + 2Z_n, \quad B_n = B_{n-1} + 1 - Z_n \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Sei $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$ die σ -Algebra der bis zur n -ten Stufe beobachtbaren Ereignisse, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$P[Z_n = 1 | \mathcal{F}_{n-1}] = 1 - P[Z_n = 0 | \mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1} \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Wir zeigen jetzt, daß $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein beschränktes Submartingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bildet. In der Tat: $X_n = \frac{R_n}{R_n + B_n}$ ist $\mathcal{F}_n$ -meßbar,

weil $R_n = 1 + \sum_{k=1}^n 2Z_k$ und $B_n = 1 + \sum_{k=1}^n (1 - Z_k)$ $\mathcal{F}_n$ -meßbar sind.

Wegen $0 \leq X_n \leq 1$ ist $(X_n)_n$ beschränkt. Zudem gilt für $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} E[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= \frac{R_{n-1} + 2}{R_{n-1} + 2 + B_{n-1}} P[Z_n = 1 | \mathcal{F}_{n-1}] + \frac{R_{n-1}}{R_{n-1} + B_{n-1} + 1} P[Z_n = 0 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &\geq \frac{R_{n-1} + 1}{R_{n-1} + 1 + B_{n-1}} P[Z_n = 1 | \mathcal{F}_{n-1}] + \frac{R_{n-1}}{R_{n-1} + B_{n-1} + 1} P[Z_n = 0 | \mathcal{F}_{n-1}] \end{aligned}$$

Begründung: (*)

$$\begin{aligned} &= \frac{(R_{n-1} + 1) X_{n-1} + R_{n-1} (1 - X_{n-1})}{R_{n-1} + B_{n-1} + 1} = \frac{R_{n-1} (R_{n-1} + B_{n-1} + 1)}{\underset{X_{n-1} = \frac{R_{n-1}}{R_{n-1} + B_{n-1}}}{(R_{n-1} + B_{n-1}) (R_{n-1} + B_{n-1} + 1)}} = X_{n-1} \end{aligned}$$

Also ist $(X_n)_n$ ein beschränktes Submartingal und daher nach dem Submartingalsatz p.f.s. konvergent für $n \rightarrow \infty$.

zu (*): Es gilt $\frac{R_{n-1} + 2}{R_{n-1} + B_{n-1} + 2} \geq \frac{R_{n-1} + 1}{R_{n-1} + B_{n-1} + 1}$ wegen $(R_{n-1} + 2)(R_{n-1} + B_{n-1} + 1) =$

$$= R_{n-1}^2 + R_{n-1} B_{n-1} + 3R_{n-1} + 2B_{n-1} + 2 \geq R_{n-1}^2 + R_{n-1} B_{n-1} + 2R_{n-1} + B_{n-1} + 2 = (R_{n-1} + 1)(R_{n-1} + B_{n-1} + 1)$$

Aufgabe 3. Es seien X und Y unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Berechnen Sie $E[X^2|X+Y]$. Stellen Sie das Ergebnis in der Form $g(X+Y)$ für eine geeignete Funktion g dar.

Wir definieren $U = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$, $V = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$, also $X = \frac{U+V}{\sqrt{2}}$, $Y = \frac{U-V}{\sqrt{2}}$

$\begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ mit $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, einer Drehmatrix um 45° .

Die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ von X und Y ist drehinvariant; also besitzen U, V ebenfalls die gemeinsame Dichte

$$f_{U,V}(u,v) = \underbrace{|\det A^{-1}|}_{=1} \cdot \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2\right] = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}$$

Insbesondere sind U, V ebenfalls unabhängig $\mathcal{N}(0,1)$ -verteilt.

$$\text{Es folgt: } E[X^2|X+Y] = E\left[\frac{1}{2}(U+V)^2 \mid \sqrt{2}U\right] =$$

$$= \frac{1}{2} E[U^2|U] + E[UV|U] + \frac{1}{2} E[V^2|U]$$

$$= \frac{1}{2} U^2 + U \underbrace{E[V|U]}_{=E[V]=0} + \frac{1}{2} \underbrace{E[V^2]}_{=1}$$

$\uparrow$
 U, V unabh.

$$\sigma(\sqrt{2}U) = \sigma(U)$$

$$= \frac{1}{2} (X+Y)^2 + \frac{1}{2} \text{ p.f.s. Wir können also } g(u) = \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} \text{ wählen.}$$

Aufgabe 4. Anton und Berta besitzen je a Euro, $a \in \mathbb{N}$. Die beiden spielen folgendes Glücksspiel: Sie werfen immer wieder eine faire Münze. Erscheint "Kopf", zahlt Anton einen Euro an Berta, sonst umgekehrt. Die beiden hören zu spielen auf, sobald einer der beiden Spielenden kein Kapital mehr hat. Es sei T die Anzahl der Runden des Spiels bis zum Abbruch. Zeigen Sie: $E[T] = a^2$.

Hinweis: In einem möglichen Lösungsweg spielt die Folge der Zufallsvariablen $(X_{n \wedge T}^2 - n \wedge T)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wichtige Rolle, wobei X_n den Gewinn von Anton in Euro nach n Runden bezeichnet.

Sei $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, und

$Z_n = X_n - X_{n-1}$, $n \geq 1$. Die Z_n sind also i.i.d. $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$ -verteilt.

Es gilt: $T = \inf\{n \in \mathbb{N} : |X_n| = a\}$ ist eine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$,

denn $\{T = n\} = \{|X_n| = a, |X_k| < a \text{ für } k < n\} \in \mathcal{F}_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen jetzt: $(X_n^2 - n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$.

In der Tat: X_n ist $\mathcal{F}_n$ -messbar, und es gilt:

$$E[X_{n+1}^2 - (n+1) | \mathcal{F}_n] = E[(X_n + Z_{n+1})^2 - n - 1 | \mathcal{F}_n] =$$

$$= E\left[\underbrace{X_n^2}_{\mathcal{F}_n\text{-messbar}} + 2X_n Z_{n+1} + \underbrace{Z_{n+1}^2}_{=1} - n - 1 \mid \mathcal{F}_n\right] =$$

$$= X_n^2 + 2X_n \underbrace{E[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n]}_{=0} - n = X_n^2 - n.$$

Aus dem Stoppsatz folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$E[X_{n \wedge T}^2 - n \wedge T] = E[X_0^2 - 0] = 0.$$

Weiter gilt: $n \wedge T \nearrow T$ für $n \rightarrow \infty$, also $E[n \wedge T] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[T]$ nach mon. Konv., sowie $|X_{n \wedge T}| \leq a$ und $X_{n \wedge T}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X_T^2 = a^2$ p.f.s., also $E[X_{n \wedge T}^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^2$ wegen dom. Konv. (Beachten Sie, daß $T < \infty$ p.f.s., wie aus der Vorlesung bekannt ist.)

Zusammen folgt:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_{n \wedge T}^2 - n \wedge T] = a^2 - E[T], \text{ also } E[T] = a^2.$$

Aufgabe 5. Es seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ reellwertige, unabhängige Zufallsvariablen mit den Dichten

$$\frac{d\mathcal{L}(X_n)}{d\lambda}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2} \exp(-\sqrt{n}|x|), \quad x \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie: Die Verteilung von $(2 \log n)^{-1/2} \sum_{k=1}^n X_k$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ schwach gegen die Standardnormalverteilung.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die folgende Aussage verwenden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1$$

Aus Übungsaufgabe 49 von Blatt 12 ist bekannt:

$\forall k \in \mathbb{R}: E[e^{ikX_n}] = \frac{n}{n+k^2}$. Weil die X_n unabhängig sind, folgt für alle $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_n(k) &:= E\left[\exp\left(ik \frac{1}{\sqrt{2 \log n}} \sum_{\ell=1}^n X_\ell\right)\right] = \prod_{\ell=1}^n E\left[\exp\left(i \frac{k}{\sqrt{2 \log n}} X_\ell\right)\right] \\ &= \prod_{\ell=1}^n \frac{n}{n + \frac{k^2}{2 \log n}} = \prod_{\ell=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k^2}{2 \ell \log n}} = \exp\left(-\sum_{\ell=1}^n \log\left(1 + \frac{k^2}{2 \ell \log n}\right)\right). \end{aligned}$$

Nun gilt $\log(1+x) = x + O(x^2)$ für $x \rightarrow 0$, und $\max_{\ell=1, \dots, n} \left| \frac{k^2}{2 \ell \log n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Es folgt mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$, Fehlertermen $R_{k,\ell,n}$ für alle n groß genug:

$$\sum_{\ell=1}^n \log\left(1 + \frac{k^2}{2 \ell \log n}\right) = \sum_{\ell=1}^n \left(\frac{k^2}{2 \ell \log n} + R_{k,\ell,n}\right), \text{ wobei:}$$

$$\left| \sum_{\ell=1}^n R_{k,\ell,n} \right| \leq C \sum_{\ell=1}^n \left(\frac{k^2}{2 \ell \log n}\right)^2 \leq \frac{C k^4}{4 (\log n)^2} \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^2}}_{=\frac{\pi^2}{6} < \infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$\sum_{\ell=1}^n \frac{k^2}{2 \ell \log n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{k^2}{2} \text{ nach dem Hinweis.}$$

Zusammen folgt $f_n(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{k^2}{2}} = \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(k)$. Fouriertransf.

Die Fouriertransformierte von $S_n := \frac{1}{\sqrt{2 \log n}} \sum_{\ell=1}^n X_\ell$ konvergiert also punktweise gegen die Fouriertransformierte von $\mathcal{N}(0,1)$; also konvergiert $\mathcal{L}(S_n)$ für $n \rightarrow \infty$ schwach gegen $\mathcal{N}(0,1)$.