WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE
UNIVERSITÄT MÜNCHEN – SOMMER 2006
5.10.2006

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	Bonuspkt.	Σ

Bitte kontrollieren Sie, daß Sie fünf Aufgaben erhalten haben.
Schreiben Sie bitte Ihren Namen in Blockschrift auf jedes Blatt, einschließlich Deckblatt.

Zugelassene Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes DIN A4 Blatt (Vor- und Rückseite) mit Inhalten Ihrer Wahl, Schreibstift, aber *kein Bleistift, kein Tintenlöscher. Mobiltelefone sind verboten.*

Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt (Vor- und Rückseite). Wenn der Platz nicht reicht, steht Ihnen am Ende der Klausur ein leeres Blatt zur Verfügung. Sollten Sie dieses Blatt benötigen, vermerken Sie das bitte bei den betroffenen Aufgaben.

Alle Aussagen, die in der Vorlesung bewiesen wurden, dürfen Sie ohne Beweis verwenden, wenn Sie sie zitieren.

Bei jeder Aufgabe sind maximal 5 Punkte erreichbar. Sie haben bestanden, wenn Sie mindestens 10 Punkte erreichen.

Sie haben 120 Minuten Zeit.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. Die vier Seitenflächen eines fairen Tetraeders sind mit den Augenzahlen 0, 1, 2 und 3 beschriftet. Es wird so lange zufällig geworfen, bis zum ersten Mal die Augenzahl "3" unten liegt. Die untenliegenden Augenzahlen werden addiert. Berechnen Sie die Varianz dieser Augensumme.
Hinweise: Es ist zweckmäßig, auf die Anzahl N der Würfe zu bedingen. Sie dürfen folgende Formeln, die für $|p| < 1$ gelten, ohne Beweis verwenden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} np^n = \frac{p}{(1-p)^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p^n = \frac{p+p^2}{(1-p)^3}$$

Aufgabe 2. Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ unabhängige, auf dem Einheitsintervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie: Mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt $n^2 X_{n+1} < \sum_{k=1}^{n} X_k$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3. Es sei t eine reelle Zahl mit $0 < t < 1$. Weiter seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit den Verteilungen $\mathcal{L}_P(X) = \mathcal{N}(0, t)$ und $\mathcal{L}_P(Y) = \mathcal{N}(0, 1-t)$, wobei $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ die Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 bezeichnet. Zeigen Sie, daß eine bedingte Verteilung von X gegeben $X+Y$ P-fast sicher durch

$$P[X \in A | X + Y] = \mathcal{N}(tX + tY, t - t^2)(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

gegeben wird.

Aufgabe 4. Anton und Berta spielen folgendes unfaire Glücksspiel: Sie werfen immer wieder eine faire Münze. Erscheint "Kopf", zahlt Anton *zwei* Euro an Berta, sonst zahlt Berta *einen* Euro an Anton. Das Spiel wird abgebrochen, sobald Anton eine positive Spielbilanz hat, d.h. sobald er kumuliert 1 Euro Gewinn gemacht hat. Wenn Anton niemals eine positive Spielbilanz hat, wird unbegrenzt weitergespielt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel nach endlicher Zeit abgebrochen wird.
Hinweis: Es empfiehlt sich, zunächst ein $a > 1$ so zu finden, daß $(a^{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bezüglich einer geeigneten Filtration ist, wobei X_n die Spielbilanz von Anton nach n Runden bezeichnet.

Aufgabe 5. Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Wir definieren rekursiv: $Y_0 := 0$,

$$Y_n := Y_{n-1} + X_n 1_{\{Y_{n-1}\geq 0\}} + \operatorname{sign}(X_n) 1_{\{Y_{n-1}<0\}}, \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$$

wobei $\operatorname{sign}(X_n) := 1_{\{X_n>0\}} - 1_{\{X_n<0\}}$ das Vorzeichen von X_n bezeichnet. Zeigen Sie: Die Verteilung von $Y_n/\sqrt{n}$ konvergiert für $n \to \infty$ schwach gegen die Standardnormalverteilung. *Hinweis:* Es liegt nahe, den Zentralen Grenzwertsatz für Martingale zu verwenden.