

Analysis II

Franz Merkl¹

Universität München

sehr vorläufige Version² vom 24. Mai 2005

©Franz Merkl, 2005. Dieses Skript und sein L^AT_EX-Quelltext darf von den Hörern der Vorlesung M2A an der Universität München vom Sommersemester 2005 für die Zwecke der Vorlesung frei kopiert und gedruckt werden. Dieses Skript soll in Zusammenarbeit mit vielen Studierenden fertiggestellt werden. Freiwillige, die einige Seiten tippen wollen, werden gebeten, sich bei Herrn Merkl zu melden.

Inhaltsverzeichnis

0	Überblick	1
1	Metrische Räume	2
1.1	Definitionen und Beispiele	2
1.2	Topologie metrischer Räume	10
1.3	Konvergenz und Stetigkeit	15
1.4	Cauchyfolgen und Vollständigkeit	15
2	Differentialrechnung im \mathbb{R}^n	19
2.1	Motivation: Flächen im \mathbb{R}^3	19
2.2	Partielle Ableitungen	19

0 Überblick

Das Thema der Vorlesung Analysis II ist die Differentialrechnung und Integralrechnung mit mehreren Veränderlichen. Grob betrachtet ist die Vorlesung Analysis II parallel zur Analysis I aufgebaut:

- Im ersten Kapitel “Metrische Räume” untersuchen wir Topologie, Konvergenz und Stetigkeit über höherdimensionalen und abstrakten Räumen. Als ein wichtiges Beispiel werden wir einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme besprechen.

¹Der Autor dankt Frau G. Bach, Herrn S. Huy, Herrn B. Menge und Frau L. Stein für die Hilfe bei der technischen Herstellung des Skripts und Frau Y. Bregman für die Hilfe beim Korrekturlesen.

²**Vorsicht, Baustelle.** Das ist nur der Entwurf eines Anfangsstücks eines Skripts. Ohne jede Garantie. Für Hinweise auf Fehler aller Art ist der Autor dankbar.

- Im zweiten Kapitel geht es um die Differentialrechnung im \mathbb{R}^n , also um Ableitungen von Funktionen mit mehreren Veränderlichen.
- Das dritte Kapitel “Maß und Integral” ist der Lebesgueschen Integrationstheorie über meßbaren Räumen gewidmet. Diese Theorie, die Anfang des 20. Jahrhunderts entstand, hat unter anderem stärkere Konvergenzsätze als die Riemann-Theorie. Sie ist z.B. grundlegend für die Funktionalanalysis und die Wahrscheinlichkeitstheorie.

Unterschiede zur Vorlesung Analysis I bestehen in der höheren (manchmal unendlichen) Dimension des Grundraums und im höheren Abstraktionsgrad.

1 Metrische Räume

1.1 Definitionen und Beispiele

In der Analysis einer Variablen spielte der Abstand $|x - y|$ zweier Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ eine wichtige Rolle, z.B. bei der Definition der Konvergenz, von Cauchyfolgen, der Stetigkeit etc. In höherdimensionalen Situationen wird die Rolle des Abstands $|x - y|$ durch eine “Metrik” übernommen.

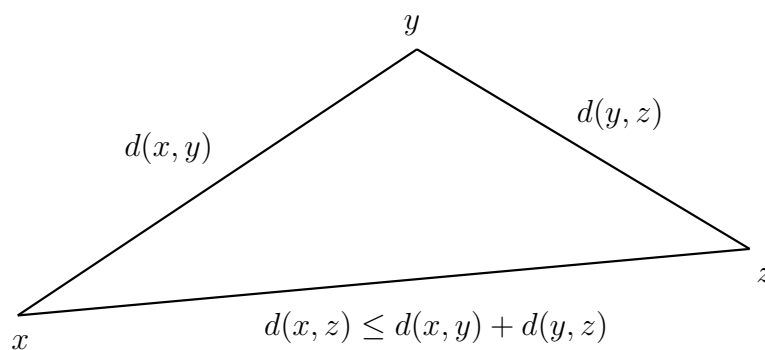
Definition 1.1. Sei M eine Menge. Eine Abbildung $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Semimetrik* (Synonyme: *Pseudometrik*, *Halbmetrik*) auf M , wenn gilt:

1. $\forall x, y \in M : d(x, y) \geq 0$
2. “Symmetrie”: $\forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x)$
3. “Dreiecksungleichung”: $\forall x, y, z \in M : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
4. $\forall x \in M : d(x, x) = 0$

(M, d) heißt dann *semimetrischer Raum*. Gilt zusätzlich:

5. $\forall x, y \in M : (d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y)$,

so heißt d eine *Metrik*. (M, d) heißt dann ein *metrischer Raum*.



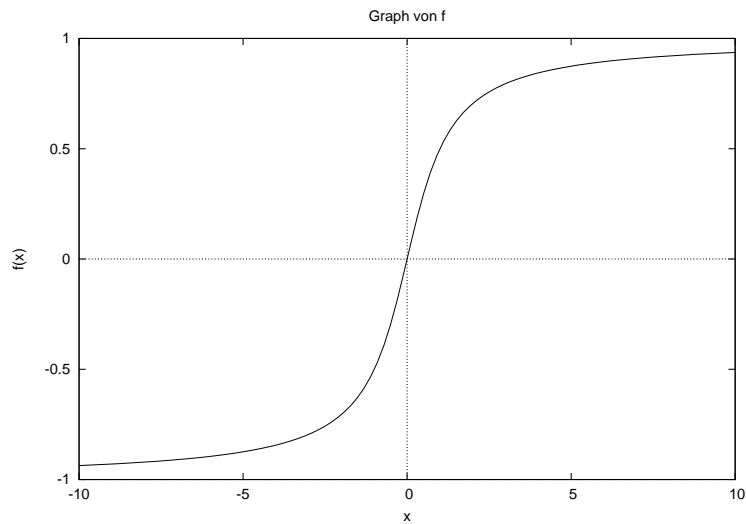
Beispiel 1.2. 1. $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$, ist eine Metrik auf \mathbb{R} .

Ebenso ist $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$, eine Metrik auf \mathbb{C} .

2. Wir definieren $f : \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \rightarrow [-1, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arctan x & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ -1 & \text{für } x = -\infty \\ 1 & \text{für } x = +\infty \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{d} : (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{d}(x, y) = |f(x) - f(y)|$, eine Metrik auf $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.



3. Es sei $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,

$$f(z) = \frac{1}{|z|^2 + 1} (2 \operatorname{Re} z, 2 \operatorname{Im} z, |z|^2 - 1) \quad \text{für } z \neq \infty,$$

$$f(\infty) = (0, 0, 1)$$

die stereographische Projektion.

Dann ist

$$\tilde{d} : (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{d}(z, w) = \|f(z) - f(w)\|$$

eine Metrik auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Hier bezeichnet $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die euklidische Länge im \mathbb{R}^3 .

Definition 1.3. Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. $\|\cdot\|$ heißt *Seminorm* (synonym: *Halbnorm*), wenn gilt:

1. $\forall x \in V : \quad \|x\| \geq 0$
2. “Homogenität”: $\forall x \in V \forall \alpha \in \mathbb{R} : \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3. “Dreiecksungleichung”: $\forall x, y \in V : \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Gilt zusätzlich:

4. “positive Definitheit”: $\forall x \in V \setminus \{0\} : \quad \|x\| > 0$,
so heißt $\|\cdot\|$ eine *Norm auf V* und $(V, \|\cdot\|)$ ein *normierter Raum*.

Lemma 1.4. Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so wird durch $d(x, y) = \|x - y\|$ für $x, y \in V$ eine Metrik d auf V induziert. Ist $\|\cdot\|$ nur eine Seminorm, wird d eine Semimetrik.

Beweis. Seien $x, y, z \in V$. Dann gilt:

$$d(x, y) = \|x - y\| \geq 0 \text{ wegen 1.,}$$

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = d(x, y) \text{ wegen 2.}$$

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z) \text{ wegen 3.}$$

$$d(x, x) = \|x - x\| = \|0\| = |0| \|0\| = 0 \text{ wegen 2.}$$

Ist $\|\cdot\|$ positiv definit, so gilt für $x \neq y$:

$$x - y \neq 0, \text{ also } d(x, y) = \|x - y\| > 0 \text{ wegen 4.} \quad \square$$

Beispiel 1.5. 1. Ist (V, σ) ein euklidischer Vektorraum, d.h. V ein \mathbb{R} -Vektorraum und σ ein euklidisches Skalarprodukt auf V , so wird durch

$$V \ni x \mapsto \|x\| := \sqrt{\sigma(x, x)}$$

eine Norm auf V definiert, die vom Skalarprodukt σ *induzierte Norm*. Die zugehörige Metrik heißt die von σ *induzierte Metrik*. Insbesondere heißt die vom kanonischen Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n ,

$$\sigma(x, y) = x^t y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

induzierte Norm bzw. Metrik *euklidische Norm* $\|\cdot\|_2$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

bzw. die *euklidische Metrik*

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto \|x - y\|_2.$$

Erinnern Sie sich aus der linearen Algebra, dass die Dreiecksungleichung

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|\sigma(x, y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

folgt.

2. Allgemeiner definieren wir für $p \geq 1$ die p -Norm $\|\cdot\|_p$ auf \mathbb{R}^n .
Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Im Fall $p = 2$ ist das die euklidische Norm auf \mathbb{R}^n .

Die Eigenschaften $\|x\|_p \geq 0$, $\|\alpha x\|_p = |\alpha| \|x\|_p$ und für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \|x\|_p > 0$ sind offensichtlich.

Für den Beweis der Dreiecksungleichung muss man härter arbeiten.

Im Fall $p = 1$ erhält man:

$$\|x + y\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| + \sum_{j=1}^n |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Im Fall $p > 1$ brauchen wir eine Verallgemeinerung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. Es bezeichne das σ das kanonische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n .

Satz 1.6. (Höldersche Ungleichung)

Sei $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1} > 1$, also $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\sigma(x, y) \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

Im Spezialfall $p = q = 2$ ist das die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

Beweis. Wir zeigen für alle $a, b \in [0, +\infty[$:

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

Dies ist offensichtlich für $a = 0$ oder $b = 0$. Wir dürfen also $a > 0$ und $b > 0$ annehmen. Da die Exponentialfunktion konvex ist, folgt wegen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\begin{aligned} ab &= e^{\frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{q} \log(b^q)} \\ &\leq \frac{1}{p} e^{\log(a^p)} + \frac{1}{q} e^{\log(b^q)} \\ &= \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q. \end{aligned}$$

Für $x = 0$ oder $y = 0$ ist die Höldersche Ungleichung offensichtlich, denn hier ist

$$|\sigma(x, y)| = 0 = \|x\|_p \|y\|_q.$$

Wir dürfen also $\|x\|_p > 0$ und $\|y\|_q > 0$ annehmen. Wir setzen $\tilde{x} = \frac{1}{\|x\|_p} x$ und $\tilde{y} = \frac{1}{\|y\|_q} y$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \frac{|\sigma(x, y)|}{\|x\|_p \|y\|_q} &= |\sigma(\tilde{x}, \tilde{y})| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |\tilde{x}_j| |\tilde{y}_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{p} |\tilde{x}_j|^p + \frac{1}{q} |\tilde{y}_j|^q \right) \\ &= \frac{1}{p} \|\tilde{x}\|_p^p + \frac{1}{q} \|\tilde{y}\|_q^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

wegen $\|\tilde{x}\|_p = 1 = \|\tilde{y}\|_q$, also die Behauptung. □

Nun zeigen wir die Dreiecksungleichung für die p -Norm, $p > 1$:

$$\boxed{\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p} \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

Beweis dazu: Wir definieren $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}$ durch $z_j := |x_j + y_j|^{p-1}$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_p^p &= \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \\
&= \sum_{j=1}^n |x_j + y_j| z_j \\
&\leq \sum_{j=1}^n |x_j| z_j + \sum_{j=1}^n |y_j| z_j \\
&\leq \|x\|_p \|z\|_q + \|y\|_p \|z\|_q \quad [\text{wegen Hölder}] \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p) \|z\|_q
\end{aligned} \tag{1}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\|z\|_q^q &= \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{(p-1)q} \\
&= \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \quad [\text{wegen } (p-1)q = p] \\
&= \|x + y\|_p^p,
\end{aligned}$$

also

$$\|z\|_q = \|x + y\|_p^{\frac{p}{p-1}} = \|x + y\|_p^{p-1},$$

wieder wegen $(p-1)q = p$.

Durch Einsetzen in die Formel (1) erhalten wir

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p-1},$$

woraus die Behauptung in beiden Fällen, $x + y = 0$ und $x + y \neq 0$, folgt.

□

Weitere Beispiele für (Semi-)Normen:

Beispiel 1.7. Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die *Maximumnorm*

$$\|x\|_\infty := \max_{j=1 \dots n} |x_j|.$$

Die Notation wird durch

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p$$

motiviert; Beweis siehe Übungen.

Für sie gilt der Grenzfall der Hölder-Ungleichung:

$$\boxed{|\sigma(x, y)| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

denn

$$|\sigma(x, y)| \leq \sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \max_{k=1 \dots n} |y_k| = \|x\|_1 \|y\|_\infty$$

Beispiel 1.8 (Funktionenräume). Für $a < b$ setzen wir

$$\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}.$$

In Analogie zu den p -Normen auf \mathbb{R}^n definieren wir p -Normen auf $\mathcal{C}[a, b]$:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 1 \leq p < +\infty$$

$$\|f\|_\infty = \max \{|f(x)| \mid a \leq x \leq b\}.$$

Für sie gilt auch die *Höldersche Ungleichung*

$$\boxed{\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q} \quad \text{für } f, g \in \mathcal{C}[a, b]$$

und

$$p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{oder} \quad p = 1, q = \infty,$$

sowie die Dreiecksungleichung

$$\boxed{\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p}$$

(Übung).

Um $\|f\|_p > 0$ für $f \neq 0$ zu zeigen, benutzen wir die Stetigkeit von f :

Ist $f \neq 0$, so gibt es $y \in [a, b]$ mit $f(y) \neq 0$, also $|f(y)| > 0$. Dann gibt es ein Intervall $I = [c, d] \subseteq [a, b]$ mit $c < d$ und $y \in I$, so dass für alle $x \in I$ gilt: $|f(x)| \geq \frac{1}{2}|f(y)|$. Es folgt:

$$\|f(x)\|_p^p = \int_a^b |f(x)|^p dx \geq \int_c^d |f(x)|^p dx \geq \int_c^d \left(\frac{1}{2}|f(y)|\right)^p dx > 0$$

Bemerkung: Die Stetigkeit von f ist hier wesentlich: Nimmt man die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen $\mathcal{R}[a, b]$ statt $\mathcal{C}[a, b]$, so erhält man nur Seminormen.

Zum Beispiel hat die Funktion

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

die p -Norm

$$\|f\|_p = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \quad \text{für alle } p \text{ mit } 1 \leq p < +\infty.$$

Zusammenkleben von Punkten Wir beschreiben nun ein Verfahren, wie man aus Semimetriken (oder Seminormen) Metriken (oder Normen) gewinnen kann. Das Verfahren besteht im „Zusammenkleben von Punkten mit Abstand 0“.

Lemma 1.9. Es sei d eine Semimetrik auf einer Menge M . Dann ist die Relation \sim auf M , definiert durch

$$x \sim y \iff d(x, y) = 0,$$

eine Äquivalenzrelation. Bezeichnet

$$[x] = \{y \in M \mid x \sim y\}$$

die Äquivalenzklasse von $x \in M$ und

$$M/\sim = \{[x] \mid x \in M\}$$

die Menge aller Äquivalenzklassen, so wird durch

$$\tilde{d} : (M/\sim) \times (M/\sim) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{d}([x], [y]) = d(x, y)$$

eine Abbildung wohldefiniert. \tilde{d} ist eine Metrik auf M/\sim .

Beweis des Lemmas: \sim ist eine Äquivalenzrelation:

Es gilt:

- $x \sim x$ für $x \in M$ wegen $d(x, x) = 0$.
- Aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$ wegen $d(x, y) = d(y, x)$.
- $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$ wegen $0 \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Nun zeigen wir, daß \tilde{d} wohldefiniert ist: Hierzu seien $x \sim x'$ und $y \sim y'$. Dann gilt:

$$d(x, y) \leq \underbrace{d(x, x')}_{=0} + d(x', y') + \underbrace{d(y', y)}_{=0} = d(x', y')$$

und ebenso $d(x', y') \leq d(x, y)$, also $d(x, y) = d(x', y')$. Damit hängt $\tilde{d}([x], [y])$ nicht von der Wahl des Repräsentanten ab. Die Eigenschaften 1.–4. in der Definition 1.1 einer Semimetrik vererben sich unmittelbar von d auf \tilde{d} .

Es bleibt noch zu zeigen: Aus $\tilde{d}([x], [y]) = 0$ folgt $[x] = [y]$. Dies folgt wegen

$$0 = \tilde{d}([x], [y]) = d(x, y) \implies x \sim y \implies [x] = [y].$$

Bemerkung: Ist M sogar ein \mathbb{R} -Vektorraum und d von einer Seminorm $\|\cdot\|$ induziert, so ist $[0] = \{x \in M \mid \|x\| = 0\}$ ein Unterraum von M , und $M/\sim = M/[0]$ ist der Quotientenraum von M modulo $[0]$. (Beweis: Übung.)

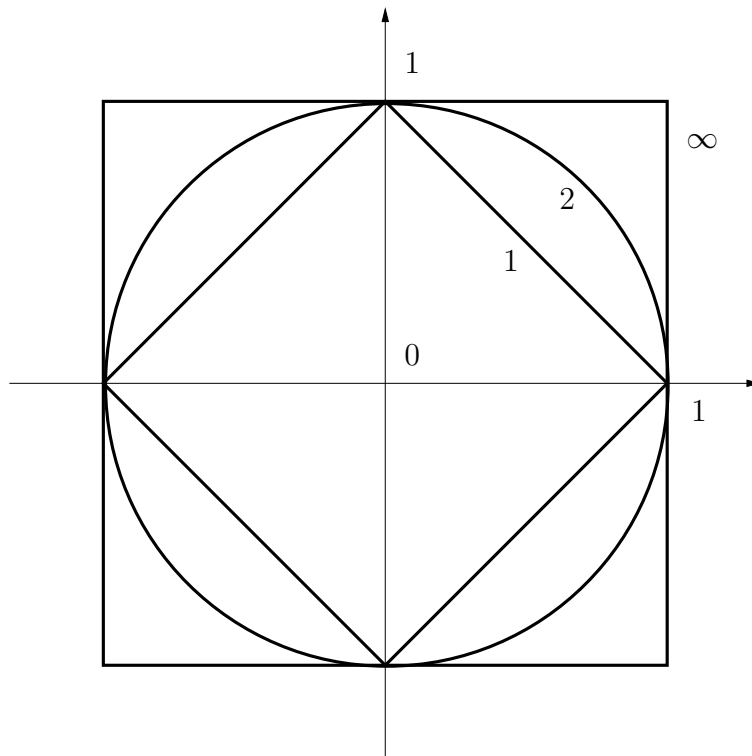
1.2 Topologie metrischer Räume

Definition 1.10. Es sei (M, d) ein semi-metrischer Raum. Für $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir die ε -Umgebung von x :

$$U_\varepsilon^d(x) := \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

Falls keine Mißverständnisse zu befürchten sind, welche Metrik gemeint ist, schreiben wir einfach $U_\varepsilon(x)$ statt $U_\varepsilon^d(x)$.

Illustration: Die Umgebungen $U_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ für die Normen $\|\cdot\|_p$, $p = 1, 2, \infty$.



Definition 1.11. Es sei (M, d) ein (semi-)metrischer Raum. Eine Menge $U \subseteq M$ heißt *offen*, wenn gilt:

$$\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon^d(x) \subseteq U.$$

Anders gesagt bedeutet das:

$$\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \forall y \in M : (d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow y \in U)$$

d.h. für jedes $x \in U$ gehört auch noch eine genügend kleine ε -Umgebung zu U . Wir bezeichnen die Menge aller offenen Teilmengen von M mit \mathcal{T}_d . Erinnern Sie sich an den Begriff der *Topologie*:

Definition 1.12. Sei M eine Menge und \mathcal{T} eine Menge von Teilmengen von M . Die Menge \mathcal{T} heißt eine *Topologie* auf M , wenn gilt:

- a) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $M \in \mathcal{T}$,
- b) Aus $A, B \in \mathcal{T}$ folgt $A \cap B \in \mathcal{T}$.
- c) Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen von \mathcal{T} , so gilt $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Das Paar (M, \mathcal{T}) heißt dann *topologischer Raum*. Die Elemente von \mathcal{T} werden *offen* genannt.

Lemma 1.13. Ist (M, d) ein *semi-metrischer Raum*, so ist \mathcal{T}_d eine *Topologie* auf M .

\mathcal{T}_d heißt die von der (Semi-)Metrik d *induzierte Topologie*.

Beweis:

- a) $\emptyset \in \mathcal{T}_d$ und $M \in \mathcal{T}_d$ sind trivial.
- b) Es seien $A, B \in \mathcal{T}_d$, d.h. A und B sind offen. Weiter sei $x \in A \cap B$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq A$ und $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subseteq B$. Nun gilt

$$U_{\min\{\varepsilon, \delta\}}(x) \subseteq U_\varepsilon(x) \cap U_\delta(x) \subseteq A \cap B,$$

denn aus $d(x, y) < \min(\varepsilon, \delta)$, $y \in M$, folgt $d(x, y) < \varepsilon$ und $d(x, y) < \delta$. Also ist $A \cap B \in \mathcal{T}_d$.

- c) Es sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie in \mathcal{T}_d und $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Dann gibt es $j \in I$ mit $x \in A_j$. Wegen $A_j \in \mathcal{T}_d$ gibt es $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Also ist $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_d$.

Definition 1.14. 1. Es sei (M, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Eine Menge $U \subseteq M$ heißt *Umgebung* eines Punktes $x \in M$, wenn es eine offene Menge $V \in \mathcal{T}$ gibt, so daß $x \in V \subseteq U$ gilt. Wir schreiben $\mathcal{U}(x)$ für die Menge aller Umgebungen von x . Ist $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ für eine Metrik d , so bedeutet das:

$$\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x) \subseteq U.$$

Wir werden nämlich unten sehen, daß $U_\varepsilon(x)$ offen ist.

- 2. Eine Menge $U \subseteq M$ heißt *abgeschlossen*, wenn $M \setminus U$ offen ist. Ist die Topologie \mathcal{T} von einer Metrik d induziert, so bedeutet das:

$$\forall x \in M \setminus U \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon^d(x) \cap U = \emptyset$$

3. Ein Punkt $x \in M$ heißt *Berührungspunkt* von $U \subseteq M$, wenn jede Umgebung von x die Menge U trifft. Im Fall eines metrischen Raums bedeutet das:

$$\forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon^d(x) \cap U \neq \emptyset$$

Die Menge aller Berührungspunkte von U heißt *Abschluß* von U und wird mit \overline{U} bezeichnet.

4. $U \subseteq M$ heißt *dicht*, wenn $\overline{U} = M$ gilt.
5. Ein Punkt $x \in M$ heißt *innerer Punkt* von $U \subseteq M$, wenn U eine Umgebung von x ist. Im metrischen Fall bedeutet das:

$$\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon^d(x) \subseteq U$$

Die Menge aller inneren Punkte von U heißt *Inneres* von U und wird mit U° bezeichnet.

6. Ein Punkt $x \in M$ heißt *Randpunkt* von $U \subseteq M$, wenn er Berührungspunkt von U , aber kein innerer Punkt von U ist. Die Menge aller Randpunkte heißt *Rand* ∂U von U . Es gilt also $\partial U = \overline{U} \setminus U^\circ$.

Lemma 1.15. Sei (M, d) ein (semi-)metrischer Raum, $x \in M$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $U_\varepsilon^d(x)$ offen.

Beweis: Es sei $y \in U_\varepsilon^d(x)$, d.h. $d(x, y) < \varepsilon$. Wir setzen

$$\delta := \varepsilon - d(x, y) > 0.$$

Dann gilt für alle $z \in U_\delta^d(y)$:

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \delta + d(y, x) = \varepsilon,$$

also $z \in U_\varepsilon^d(x)$. Also ist $U_\delta^d(y) \subseteq U_\varepsilon^d(x)$, und daher $U_\varepsilon^d \in \mathcal{T}_d$.

□

Bemerkung: Die im Beispiel 1.2 eingeführten Metriken auf \mathbb{R} , \mathbb{C} , $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ induzieren die bereits aus der Analysis 1 bekannten Topologien auf diesen Räumen.

Lemma 1.16. Sei (M, \mathcal{T}) ein top. Raum und $N \subseteq M$. Dann ist

$$\mathcal{S} := \{U \cap N \mid U \in \mathcal{T}\}$$

eine Topologie auf N . Der Raum (N, \mathcal{S}) wird *topologischer Teilraum* von (M, \mathcal{T}) genannt.

Beweis. Es gilt:

- $\emptyset = \emptyset \cap N \in \mathcal{S}$ und $N = M \cap N \in \mathcal{S}$ wegen $\emptyset, M \in \mathcal{T}$.

- Aus $A, B \in \mathcal{S}$ folgt $A \cap B \in \mathcal{S}$. Denn es gibt $U, V \in \mathcal{T}$ mit $U \cap N = A, V \cap N = B$, also $A \cap B = (U \cap V) \cap N \in \mathcal{S}$ wegen $U \cap V \in \mathcal{T}$.
- Aus $A_i \in \mathcal{S}$ für alle $i \in I$ mit einer beliebigen Indexmenge I folgt $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{S}$. Um das zu zeigen, wählen wir zu jedem $i \in I$ ein $U_i \in \mathcal{T}$ mit $A_i = U_i \cap N$. Dann gilt $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$, also

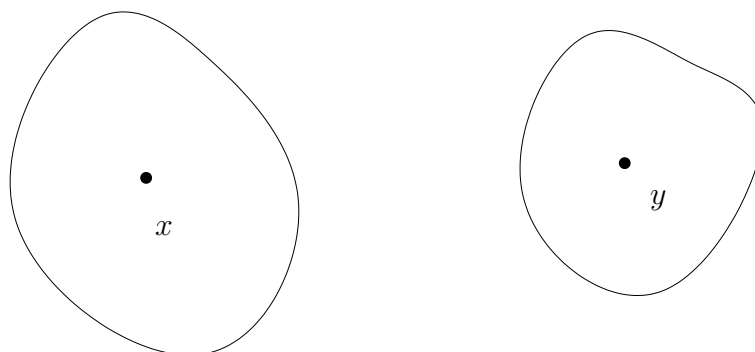
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap N \in \mathcal{S}.$$

□

Bemerkung 1.17. Wird \mathcal{T} von einer (Semi-)Metrik d induziert, so wird die Teilraumtopologie \mathcal{S} von der Einschränkung von d auf $N \times N$ induziert. (Übung)

Definition 1.18. Ein topologischer Raum (M, \mathcal{T}) heißt *Hausdorffraum*, wenn je zwei Punkte $x, y \in M, x \neq y$, disjunkte Umgebungen besitzen.

Illustration zur Hausdorffeigenschaft:



Lemma 1.19. Ist (M, d) ein metrischer Raum, so ist (M, \mathcal{T}_d) ein Hausdorffraum.

Beweis. Es seien $x \neq y$ Punkte in M . Dann gilt $\varepsilon := d(x, y) > 0$. Wir zeigen $U_{\frac{\varepsilon}{2}}^d(x) \cap U_{\frac{\varepsilon}{2}}^d(y) = \emptyset$: Angenommen, es gäbe $z \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}^d(x) \cap U_{\frac{\varepsilon}{2}}^d(y)$. Dann gälte

$$\varepsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ein Widerspruch.

□

Satz 1.20. Die von den Metriken zu $\|\cdot\|_p, 1 \leq p \leq +\infty$, auf \mathbb{R}^n induzierten Topologien stimmen alle überein. Diese Topologie heißt *Standardtopologie* auf \mathbb{R}^n .

Zum Beweis brauchen wir folgendes

Lemma 1.21. Seien $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ zwei (Semi-) Normen auf den gleichen \mathbb{R} -Vektorraum V . Es bezeichne \mathcal{T}_A bzw. \mathcal{T}_B die von $\|\cdot\|_A$ bzw. $\|\cdot\|_B$ induzierte Topologie. Es gelte

$$\exists C > 0 \forall x \in V : \|x\|_B \leq \|x\|_A.$$

Dann gilt $\mathcal{T}_B \subseteq \mathcal{T}_A$, d.h. jede B -offene Menge ist auch A -offen.

Beweis. Wir schreiben

$$U_\varepsilon^A(x) = \{y \in V \mid \|x - y\|_A < \varepsilon\} \quad \text{und} \quad U_\varepsilon^B(x) = \{y \in V \mid \|x - y\|_B < \varepsilon\}.$$

Es seien $U \in \mathcal{T}_B$ und $x \in U$. Wir müssen zeigen:

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon^A(x) \subseteq U.$$

Weil $U \in \mathcal{T}_B$, gibt es $\delta > 0$ mit $U_\delta^B(x) \subseteq U$. Setzen wir $\varepsilon := C^{-1}\delta$, dann gilt für alle $y \in U_\varepsilon^A(x)$:

$$\|x - y\|_B \leq C\|x - y\|_A < C\varepsilon = \delta,$$

also $y \in U_\delta^B(x)$. Das bedeutet:

$$U_\varepsilon^A(x) \subseteq U_\delta^B(x) \subseteq U.$$

□

Beweis des Satzes 1.20: Es seien $1 \leq p < \infty$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $|x_j| = \|x\|_\infty$, d.h. $|x_j|$ ist das Größte unter den $|x_1|, \dots, |x_n|$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty = |x_j| &= (|x_j|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \|x\|_p \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = (n\|x\|_\infty^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Das bedeutet: $\|x\|_\infty$ und $\|x\|_p$ können durch positive Konstanten 1 bzw. $n^{\frac{1}{p}}$ wechselseitig abgeschätzt werden. Aus dem Lemma 1.21 folgt: $\|x\|_\infty$ und $\|x\|_p$ induzieren die gleiche Topologie.

□

Bemerkung 1.22. 1. Alle Normen auf \mathbb{R}^n induzieren die Standardtopologie. Wir beweisen das hier nicht.

2. Die Normen $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq +\infty$, auf $\mathcal{C}[a, b]$ induzieren alle *verschiedene* Topologien, im Gegensatz zum endlichdimensionalen Fall.

1.3 Konvergenz und Stetigkeit

Sei (M, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Wir erinnern an die allgemeine Konvergenzdefinition aus der Analysis I:

Definition 1.23. Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M und $x \in M$. Wir sagen $(a_n)_n$ konvergiert gegen x , in Zeichen

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x,$$

wenn jede Umgebung U von x höchstens endlich viele Folgenglieder nicht enthält. In Formeln:

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n > m : \quad a_n \in U.$$

Ist (M, \mathcal{T}) ein Hausdorffraum, so ist der Grenzwert x eindeutig bestimmt, falls er existiert, und wir schreiben dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$.

Ist $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ für eine Metrik d , so gilt:

$$\begin{array}{c} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x \\ \iff \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n > m : \quad d(a_n, x) < \varepsilon \end{array}$$

Beispiel 1.24. Konvergenz einer Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen in $\mathcal{C}[a, b]$ gegen ein $f \in \mathcal{C}[a, b]$ in der von $\|\cdot\|_\infty$ erzeugten Topologie ist das Gleiche wie gleichmäßige Konvergenz. Es gilt nämlich:

$$\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \quad \text{in der } \|\cdot\|_\infty \text{-Topologie} \\ \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n > m : \quad \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \\ \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \quad \forall x \in [a, b] : \quad |f_n - f| < \varepsilon \\ \iff f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \quad \text{gleichmäßig.} \end{array}$$

Den Teil “ \Leftarrow ” in der zweiten Äquivalenz sieht man z.B., wenn man beachtet, daß die stetigen Funktionen $|f_n - f|$ Maxima auf der kompakten Menge $[a, b]$ besitzen.

Die $\|\cdot\|_\infty$ -Topologie heißt daher auch *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz*.

Hier fehlen noch einige Seiten.

1.4 Cauchyfolgen und Vollständigkeit

Cauchyfolgen werden analog wie in \mathbb{R} definiert:

Definition 1.25. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in M heißt *Cauchyfolge*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall k, l > m: d(a_k, a_l) < \varepsilon.$$

Wie in einer Dimension sieht man: Konvergente Folgen sind Cauchyfolgen. Die Umkehrung davon ist jedoch i.a. falsch, wie das Beispiel $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ zeigt: Jede rationale, gegen eine irrationale Zahl konvergente Folge konvergiert in $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ nicht.

Metrische Räume, in denen jede Cauchyfolge konvergiert, sind besonders wichtig:

Definition 1.26. Ein metrischer Raum (M, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in M konvergiert.

Satz 1.27. Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist \mathbb{R}^n mit der $\|\cdot\|_p$ -Metrik vollständig.

Beweis: Weil für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty,$$

genügt es zu zeigen, daß \mathbb{R}^n mit der $\|\cdot\|_\infty$ -Metrik vollständig ist. Sei hierzu $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_\infty$ -Cauchyfolge. Wir bezeichnen mit $a_{j,i}$ die i -te Komponente von a_j , $i = 1, \dots, n$. Wegen

$$|a_{k,i} - a_{l,i}| \leq \|a_k - a_l\|_\infty, \quad (k, l \in \mathbb{N})$$

ist für alle $i = 1, \dots, n$ die Folge $(a_{j,i})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R} , also konvergent gegen ein $x_i \in \mathbb{R}$. Wir setzen

$$x := (x_1, \dots, x_n).$$

Wir zeigen nun

$$a_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x \quad \text{in} \quad (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty).$$

Es gilt

$$|a_{j,i} - x_i| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n,$$

also

$$\|a_j - x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |a_{j,i} - x_i| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

d.h. $a_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x$.

□

Definition 1.28. Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum*.

Natürlich bezieht sich "Vollständigkeit" hier auf die von der Norm induzierte Metrik. Alle Räume $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq +\infty$, sind also Banachräume.

Satz 1.29. *Der Raum $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.*

Im Hinblick auf Anwendungen verallgemeinern wir diese Aussage noch: Statt stetiger Abbildungen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir stetige Abbildungen von einem beliebigen topologischen Raum mit Werten in einem Banachraum:

Definition 1.30. Sei (M, \mathcal{T}) ein nichtleerer topologischer Raum und $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Für $f: M \rightarrow V$ definieren wir die *Supremumsnorm*

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\| \mid x \in M\}.$$

Wir setzen:

$$\mathcal{C}_b(M, V) := \{f: M \rightarrow V \mid f \text{ ist stetig und } \|f\|_\infty < +\infty\}$$

Der Index “ b ” erinnert an “beschränkt”. Man kann zeigen, daß $(\mathcal{C}_b(M, V), \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Raum ist. Ein Spezialfall ist $\mathcal{C}_b([a, b], \mathbb{R}) = \mathcal{C}[a, b]$.

Wir zeigen nun:

Satz 1.31. *$(\mathcal{C}_b(M, V), \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig, also ein Banachraum.*

Beweis: Sei $(f_n: M \rightarrow V)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathcal{C}_b(M, V), \|\cdot\|_\infty)$. Es gilt für alle $x \in M$ und $k, l \in \mathbb{N}$:

$$\|f_k(x) - f_l(x)\| \leq \|f_k - f_l\|_\infty.$$

Wenn also $\|f_k - f_l\|_\infty < \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ gilt, so erst recht $\|f_k(x) - f_l(x)\| < \varepsilon$.

Also ist für alle $x \in M$ die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(V, \|\cdot\|)$. Weil $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist, konvergiert diese Folge, und wir definieren

$$f: M \rightarrow V, \quad f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Wir zeigen nun: $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall n > m : \|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon.$$

(Beachten Sie, dass es hier gleichgültig ist, ob wir “ $< \epsilon$ ” oder “ $\leq \epsilon$ ” schreiben.) Sei hierzu $\epsilon > 0$. Weil $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, können wir $m \in \mathbb{N}$ wählen, so dass für alle $n, l > m$ gilt: $\|f_n - f_l\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2}$. Es sei $x \in M$. Weil $\|f_l(x) - f(x)\| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$, können wir $l > m$ wählen, so dass $\|f_l(x) - f(x)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Es folgt:

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n(x) - f_l(x)\| + \|f_l(x) - f(x)\| \leq \|f_n - f_l\|_\infty + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Weil das für alle $x \in M$ gilt, folgt $\|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon$.

Als nächstes zeigen wir, dass f stetig ist. Wir müssen also zeigen:

$$\forall x \in M \forall \epsilon > 0 \exists U \in \mathcal{U}(x) \forall y \in U : \|f(x) - f(y)\| < \epsilon.$$

Seien hierzu $x \in M$ und $\epsilon > 0$. Weil $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, können wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$ wählen. Weil f_n stetig in x ist, können wir $U \in \mathcal{U}(x)$ wählen, so dass

$$\forall z \in U : \|f_n(x) - f_n(z)\| < \frac{\epsilon}{3}$$

gilt. Es folgt für alle $y \in U$:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(y)\| + \|f_n(y) - f(y)\| \\ &\leq \|f - f_n\|_\infty + \frac{\epsilon}{3} + \|f_n - f\|_\infty \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Schließlich gilt $\|f\|_\infty < +\infty$, da

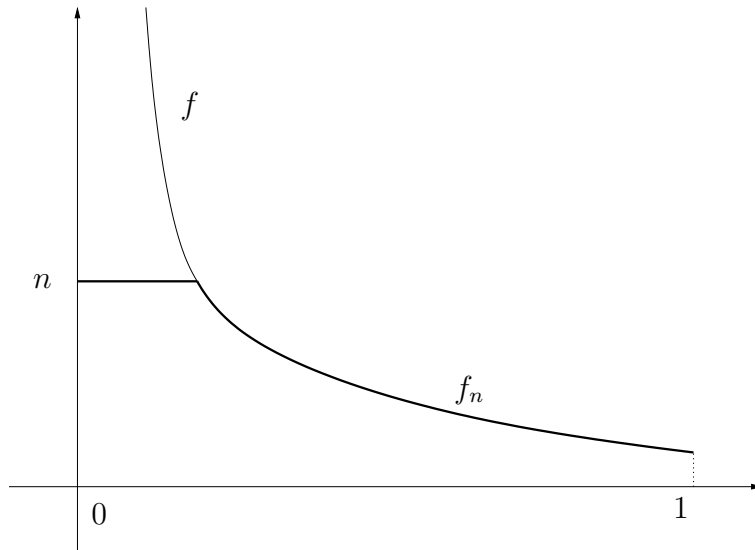
$$\|f\|_\infty \leq \underbrace{\|f - f_n\|_\infty}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{\|f_n\|_\infty}_{< \infty}$$

für alle n . Zusammengefaßt: Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f \in \mathcal{C}_b(M, V)$. □

Bemerkung: Die Räume $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_p)$ mit $a < b$, $1 \leq p < +\infty$ sind jedoch *nicht* vollständig. Zum Beispiel ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$f_n(x) = \min\{x^{-1/(2p)}, n\}, \quad f_n(0) = n,$$

eine Cauchyfolge in der $\|\cdot\|_p$ -Norm auf $\mathcal{C}[0, 1]$, aber die Grenzfunktion $f(x) = x^{-1/(2p)}$ liegt nicht in $\mathcal{C}[0, 1]$, denn sie divergiert für $x \rightarrow 0$. In $\mathcal{C}[0, 1]$ konvergiert die Folge nicht.



Hier fehlt ein Abschnitt.

Freiwillige zum Tippen gesucht!

2 Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

In diesem Kapitel geht es um Differentialrechnung mit Funktionen $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

2.1 Motivation: Flächen im \mathbb{R}^3

Zur informalen Einführung sehen wir uns an, wie Funktionen vom Typ $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zur Beschreibung von Flächen im Raum dienen können.

Siehe die Folien in

http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~stochast/lehre/m2a_ss05_merk1/graphen.pdf

2.2 Partielle Ableitungen

Definition 2.1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Die Funktion f heißt *partiell differenzierbar* nach der i -ten Komponente, wenn

$$D_i f(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x)}{h}$$

existiert. $D_i f$ heißt *partielle Ableitung* von f nach der i -ten Komponente. f heißt *partiell differenzierbar*, wenn sie partiell differenzierbar nach allen Komponenten ist.

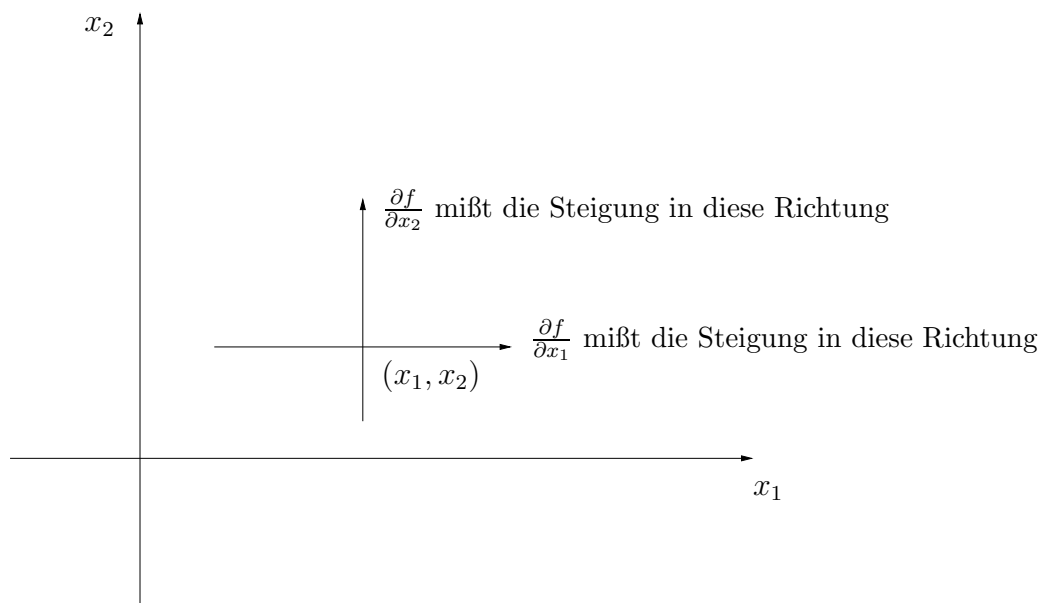
Andere Schreibweisen für die partielle Ableitung $D_i f$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \partial_i f, \partial_{x_i} f, f_{x_i}.$$

Beispiel: Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xe^y$. Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^y.$$

Interpretation: $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ bzw. $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ mißt die Steigung von f entlang einer Parallelen zur x_1 -Achse bzw. x_2 -Achse.



Formaler:

$$D_i f(x) = \left[\frac{d}{dt} f(x + te_i) \right]_{t=0},$$

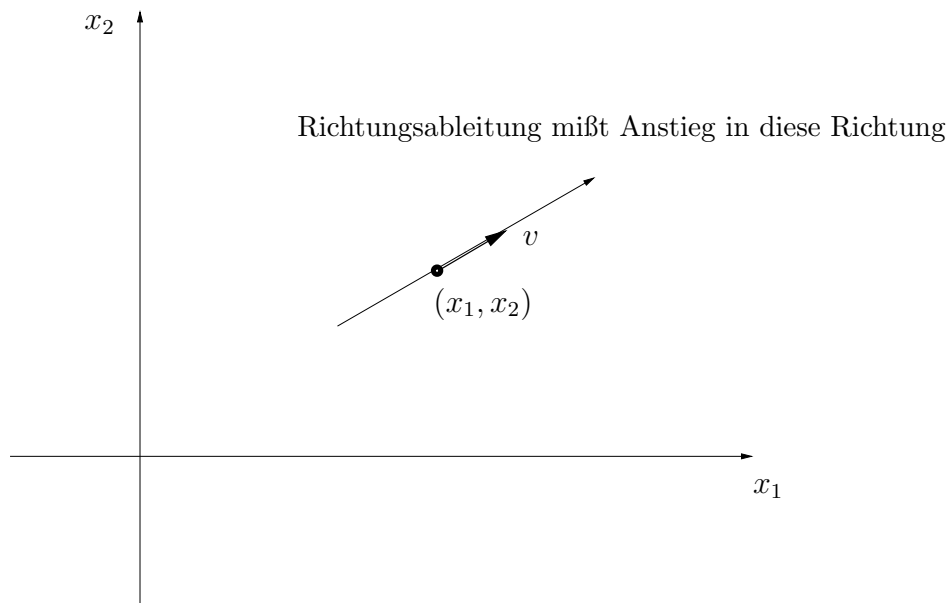
wobei $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$ den i -ten kanonischen Einheitsvektor bezeichnet.

Die Notation mit dem tiefgestellten “ $t = 0$ ” bedeutet: Man leitet erst nach t ab, und setzt dann $t = 0$ ein.

Allgemeiner: Für $x \in U, v \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$\left[\frac{d}{dt} f(x + tv) \right]_{t=0}$$

die *Richtungsableitung* von f in Richtung von v , wenn sie existiert. Sie mißt den Anstieg von f bei x in Richtung von v .



Noch allgemeiner: Wir betrachten eine parametrisierte Kurve $\gamma: I \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit einem offenen Intervall $I \ni 0$ und differenzierbaren Komponenten

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \quad \gamma(0) = x.$$

Die Ableitung

$$\left[\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right]_{t=0}$$

heißt *Richtungsableitung* von f in Richtung der Kurve γ .

Beispiel:

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $f(\gamma(t)) = 1$, also

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0.$$

In der Tat läuft γ auf einer Niveaulinie von f . Für

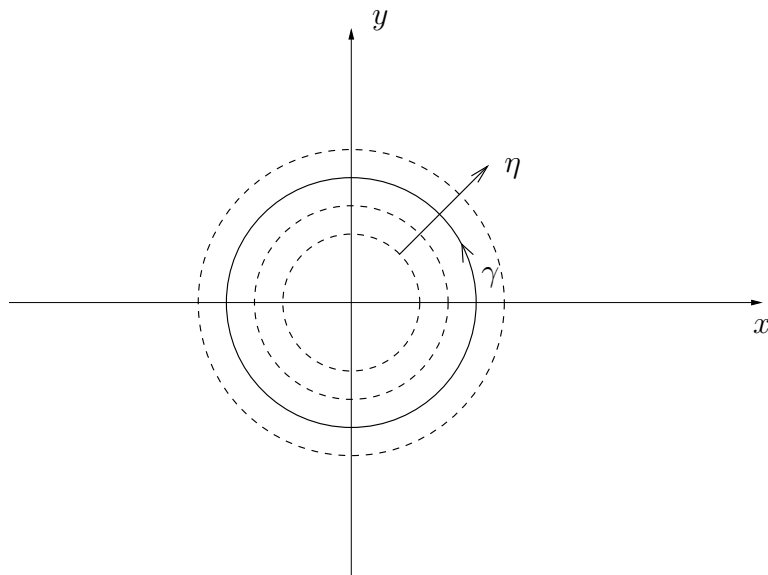
$$\eta(t) = (t+1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$f(\eta(t)) = (t+1)^2(x^2 + y^2),$$

also

$$\left[\frac{d}{dt} f(\eta(t)) \right]_{t=0} = 2(x^2 + y^2).$$



Die Niveaulinien von f sind gestrichelt dargestellt.

In Richtung von η steigt also f an, in Richtung von γ jedoch nicht.

Definition 2.2. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$. Der Spaltenvektor der partiellen Ableitungen

$$\text{grad } f(x) := \begin{pmatrix} D_1 f(x) \\ D_2 f(x) \\ \vdots \\ D_n f(x) \end{pmatrix}$$

heißt *Gradient* von f bei x . Andere Schreibweise:

$$\nabla f(x) = \text{grad } f(x).$$

Ist f sogar zweimal partiell differenzierbar, d.h. existieren $D_i D_j f$ für alle $i, j = 1, \dots, n$, so heißt die Matrix der 2. Ableitungen

$$\text{Hess } f(x) = \begin{pmatrix} D_1 D_1 f(x) & \dots & D_1 D_n f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(x) & \dots & D_n D_n f(x) \end{pmatrix} = (D_i D_j f(x))_{i,j=1\dots n}$$

die *Hessematrix* von f bei x . Statt $D_i D_j f$ schreiben wir auch $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ als Abkürzung für $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f$.

Manche Autoren drehen hier die Reihenfolge im Nenner um. In den meisten Fällen macht das aber keinen Unterschied; siehe Lemma 2.3 unten.

Die *Spur* von $\text{Hess } f(x)$, also die Summe der Diagonaleinträge, heißt *Laplaceoperator* von f an der Stelle x und wird mit $\Delta f(x)$ bezeichnet.

Beispiel: Für $f(x) = \|x\|_2$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ erhalten wir

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \right)_{i=1 \dots n} = \left(\frac{2x_i}{2\|x\|_2} \right)_{i=1 \dots n} = \frac{x}{\|x\|_2}$$

und

$$\begin{aligned} \text{Hess } f(x) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \|x\|_2 \right)_{i,j=1 \dots n} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_j}{\|x\|_2} \right)_{i,j} = \left(\frac{\delta_{ij}\|x\|_2 - x_j \frac{x_i}{\|x\|_2}}{\|x\|_2^2} \right)_{i,j} \\ &= \left(\frac{\delta_{ij}}{\|x\|_2} - \frac{x_i x_j}{\|x\|_2^3} \right)_{i,j=1 \dots n} = \frac{1}{\|x\|_2} E - \frac{1}{\|x\|_2^3} x x^t. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ das Kronecker-Delta und E die $n \times n$ Einheitsmatrix.

Weiter gilt:

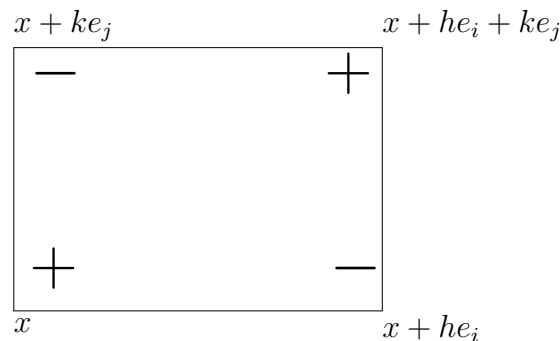
$$\Delta f(x) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\delta_{ij}}{\|x\|_2} - \frac{x_j^2}{\|x\|_2^3} \right) = \frac{n-1}{\|x\|_2}.$$

Es ist kein Zufall, daß die Hessematrix in dem Beispiel symmetrisch ist. Es gilt nämlich folgende *Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen*:

Satz 2.3 (Schwarz). *Existieren $D_i f$, $D_j f$ und $D_i D_j f$, und ist $D_i D_j f$ stetig bei x , so existiert auch $D_j D_i f(x)$ und es gilt $D_i D_j f(x) = D_j D_i f(x)$.*

Beweis: Sei f mindestens in $U_r^{\|\cdot\|_\infty}(x)$ definiert. Wir setzen für $(h, k) \in U_r^{\|\cdot\|_\infty}(0)$:

$$g(h, k) = f(x + h e_i + k e_j) - f(x + h e_i) - f(x + k e_j) + f(x).$$



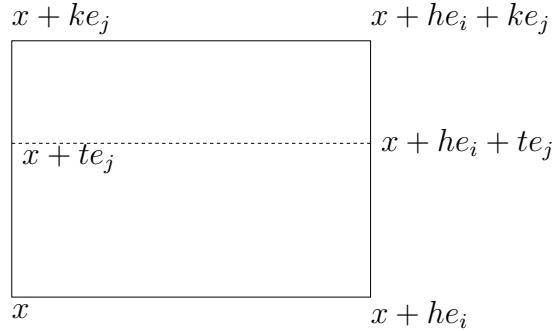
Zur Vorzeichenwahl in g

Seien $(h, k) \in U_r^{\|\cdot\|_\infty}(0)$. Der Mittelwertsatz, angewendet auf die Funktion

$$t \mapsto f(x + he_i + te_j) - f(x + te_j), \quad -r < t < r,$$

liefert: Es gilt $\xi_h \in [0, 1]$ mit

$$g(h, k) = [D_j(x + he_i + \xi_h ke_j) - D_j f(x + \xi_h ke_j)] \cdot k.$$



Nochmal der Mittelwertsatz, diesmal angewendet auf

$$s \mapsto D_j f(x + se_i + \xi_h ke_j), \quad r < s < r,$$

liefert: Es gibt $\vartheta_{h,k} \in [0, 1]$ mit

$$g(h, k) = D_i D_j f(x + \vartheta_{h,k} he_i + \xi_h ke_j) \cdot hk.$$

Wir setzen

$$\varphi(h, k) := \vartheta_{h,k} he_i + \xi_h ke_j.$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \varphi(h, k) = 0, \quad \text{also} \quad \lim_{(h,k) \rightarrow 0} D_i D_j f(x + \varphi(h, k)) = D_i D_j f(x),$$

weil $D_i D_j f$ stetig in x ist. Wir zeigen nun

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} [D_i f(x + ke_j) - D_i f(x)] = D_i D_j f(x),$$

anders geschrieben:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall k \in U_\delta(0) \setminus \{0\}: \left| \frac{1}{k} [D_i f(x + ke_j) - D_i f(x)] - D_i D_j f(x) \right| < \varepsilon.$$

Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta > 0$ so klein, daß für alle $(h, k) \in U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(0)$ gilt:

$$|D_i D_j f(x + \varphi(h, k)) - D_i D_j f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei nun $k \in U_\delta(0)$, $k \neq 0$.

Wir wählen $h \in U_\delta(0)$, $h \neq 0$ so klein, daß gilt:

$$\left| \frac{1}{h}[f(x + ke_j + he_i) - f(x + ke_j)] - D_i f(x + ke_j) \right| < \frac{\varepsilon}{4}|k|$$

und

$$\left| \frac{1}{h}[f(x + he_i) - f(x)] - D_i f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4}|k|,$$

also durch Addition und Dreiecksungleichung:

$$\left| \frac{1}{h}g(h, k) - [D_i f(x + ke_j) - D_i f(x)] \right| < \frac{\varepsilon}{2}|k|,$$

folglich

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{k}[D_i f(x + ke_j) - D_i f(x)] - D_i D_j f(x) \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{k}[D_i f(x + ke_j) - D_i f(x)] - \frac{1}{hk}g(h, k) \right| + |D_i D_j f(x + \varphi(h, k)) - D_i D_j f(x)| \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Index

- abgeschlossen, 11
- Ableitung, partielle, 19
- Abschluß, 12

- Banachraum, 16
- Berührungspunkt, 12

- Cauchyfolge, 16

- dicht, 12
- differenzierbar, partiell, 19

- euklidische Metrik, 4
- euklidische Norm, 4

- Gradient, 22
- Grenzwert, 15

- Höldersche Ungleichung, 8
- Halbmetrik, 2
- Halbnorm, 4
- Hausdorffraum, 13
- Hessematrix, 22

- induzierte Metrik, 4
- induzierte Norm, 4
- induzierte Topologie, 11
- innerer Punkt, 12
- Inneres, 12

- konvergiert, 15

- Laplaceoperator, 22

- Maximumnorm, 7
- Metrik, 2
- metrischer Raum, 2

- Norm, 4
- normierter Raum, 4

- offen, 10

- p-Norm, 5

- partiell differenzierbar, 19
- partielle Ableitung, 19
- Pseudometrik, 2

- Rand, 12
- Randpunkt, 12
- Raum, metrischer, 2
- Raum, normierter, 4
- Raum, topologischer, 11
- Richtungsableitung, 20

- Semimetrik, 2
- semimetrischer Raum, 2
- Seminorm, 4
- Standardtopologie, 13
- Supremumsnorm, 17

- Teilraum, topologischer, 12
- Topologie, 11
- Topologie der glm. Konvergenz, 15
- Topologie, induzierte, 11
- topologischer Raum, 11
- topologischer Teilraum, 12

- Umgebung, 11
- Umgebung, ε -, 10

- vollständig, 16