Satz 0.1. *Ein metrischer Raum (M, d) ist genau dann kompakt, wenn er folgenkompakt ist.*

Beweis:[1]

Folgenkompaktheit $\Rightarrow$ Kompaktheit Es sei (M, d) ein folgenkompakter metrischer Raum und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M. Für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ definieren wir

$$A_n := \{x \in M \mid \exists i \in I : U^d_{1/n}(x) \subseteq U_i\}. \tag{1}$$

Dann gilt

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, \tag{2}$$

denn aus $U^d_{1/n}(x) \subseteq U_i$ folgt $U^d_{1/(n+1)}(x) \subseteq U_i$. Weiter gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = M, \tag{3}$$

denn jedes $x \in M$ ist in einem U_i enthalten, und dieses U_i enthält noch eine kleine $\frac{1}{n}$-Umgebung von x für genügend kleines n, da U_i offen ist.
Behauptung 1: Es gibt $n \in \mathbb{N}^*$ mit $A_n = M$.
Beweis (indirekt): Andernfalls könnten wir zu jedem $k \in \mathbb{N}^*$ ein

$$x_k \in M \setminus A_k \tag{4}$$

wählen. Weil M folgenkompakt ist, konvergiert eine Teilfolge von $(x_k)_{k \geq 1}$ gegen ein $y \in M$. Nun gilt $y \in A_n$ für ein $n \in \mathbb{N}^*$ wegen (3); also können wir nach der Definition (1) von A_n ein $i \in I$ mit $U^d_{1/n}(y) \subseteq U_i$ wählen. Es folgt

$$U^d_{1/(2n)}(y) \subseteq A_{2n}. \tag{5}$$

In der Tat: Für $z \in U^d_{1/(2n)}(y)$ folgt

$$U^d_{1/(2n)}(z) \subseteq U_i, \tag{6}$$

denn für alle $u \in U^d_{1/(2n)}(z)$ erhalten wir

$$d(u, y) \leq d(u, z) + d(z, y) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n},$$

also $u \in U^d_{1/n}(y) \subseteq U_i$. Aus (6) und der Definition (1) von A_{2n} folgt nun $z \in A_{2n}$. Damit ist die Inklusion (5) gezeigt.
Für alle $k \geq 2n$ gilt

$$x_k \notin A_k \supseteq A_{2n} \supseteq U^d_{1/(2n)}(y)$$

[1]Dies ist eine vereinfachte und korrigierte Version des Beweises aus der Vorlesung. F. Merkl dankt Herrn S. Brodt für die Korrektur eines Fehlers in einer alten Version dieses Beweises.

wegen der Wahl (4) von x_k, der Monotonie (2) der $(A_l)_l$, und der Inkusion (5). Dies ist ein Widerspruch dazu, daß eine Teilfolge der Folge $(x_k)_k$ gegen y konvergiert. Die Behauptung 1 ist damit bewiesen.
Wir wählen also $n \in \mathbb{N}^*$ mit $A_n = M$. Nun zeigen wir, daß schon endlich viele Mengen $U_{j_1}, \dots, U_{j_m}$ mit $j_1, \dots, j_m \in I$ die Menge M überdecken. Wir wählen dazu Indices $j_1, j_2, \dots$ in I und Punkte $z_1, z_2, \dots$ in M rekursiv wie folgt:

- **Rekursionsanfang:** $j_1 \in I$ sei beliebig gewählt.
- **Rekursionsschritt:** Gegeben $j_1, \dots, j_m$, sind wir fertig, falls $U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_m} = M$ gilt. Andernfalls wählen wir ein beliebiges

$$z_m \in M \setminus (U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_m}) \tag{7}$$

aus. Weil

$$z_m \in M = A_n \tag{8}$$

gilt, können wir nach der Definition (1) von A_n wir ein $j_{m+1} \in I$ mit

$$U^d_{1/n}(z_m) \subseteq U_{j_{m+1}} \tag{9}$$

wählen.

Wenn das Rekursionsverfahren nicht abbricht, erhalten wir so Folgen $(z_m)_{m\geq 1}$ in M und $(j_m)_{m\geq 1}$ in I, so daß (7) und (9) für alle $m \geq 1$ gilt. Für $m > l \geq 1$ folgt hiermit:

$$z_m \notin U_{j_{l+1}} \supseteq U^d_{1/n}(z_l),$$

also $d(z_m, z_l) \geq 1/n$. Das bedeutet: Die Folge $(z_m)_{m\geq 1}$ kann keine Teilfolge besitzen, die eine Cauchyfolge ist, also kann sie auch keine konvergente Teilfolge besitzen, im Widerspruch zur vorausgesetzten Folgenkompaktheit von (M, d). Unser Rekursionsverfahren bricht also tatsächlich ab und liefert die gesuchte endliche Teilüberdeckung $U_{j_1}, \dots, U_{j_m}$.

Kompaktheit $\Rightarrow$ Folgenkompaktheit Sei (M, d) ein kompakter metrischer Raum und $x = (x_n)_n$ eine Folge in M. Wenn x keinen Häufungspunkt hätte, könnten wir zu jedem $y \in M$ eine offene Umgebung U_y wählen, die nur endlich viele Folgenglieder enthält. Dann ist $(U_y)_{y\in M}$ eine offene Überdeckung von M. Weil (M, d) kompakt ist, besitzt diese offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung $(U_y)_{y\in E}$, $E \subseteq M$ endlich. Dann enthält aber auch $M = \bigcup_{y\in E} U_y$ nur endlich viele Folgenglieder, ein Widerspruch. Also besitzt x mindestens einen Häufungspunkt $y \in M$. Wir zeigen nun: Eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von x konvergiert gegen y. Hierzu brauchen wir die Metrik: Wir wählen rekursiv $n_0 = 0$ und zu $k \geq 1$ ein $n_k > n_{k-1}$ mit $d(x_{n_k}, y) < \frac{1}{k}$; das ist möglich, da $U^d_{1/k}(y)$ unendlich viele Folgenglieder enthält. Dann folgt $y = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

$\square$