LMU München
Mathematisches Institut
SS 2018

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Wahrscheinlichkeitstheorie: Übungsblatt 13

Falls nicht anders vermerkt, bezeichne $(B(t))_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung.

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T13.1 Sei $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ein Gaußscher Vektor. Zeigen Sie, dass die Komponenten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ genau dann unabhängig sind, wenn die Kovarianzmatrix Σ Diagonalform besitzt. *Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die gemeinsame Dichte von ξ gegeben ist durch*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu) \right), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^\top$ mit $\mu_k = \mathbb{E}[\xi_k]$.

Aufgabe T13.2 Ein Prozess $(X(t))_{t\geq 0}$ wird *Gaußscher Prozess* genannt, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und beliebige $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ der Vektor $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ eine multivariate Gaußverteilung besitzt. Zeigen Sie: Ein stetiger Prozess $(X(t))_{t\geq 0}$ ist genau dann Brownsche Bewegung, falls

- $X_0 = 0$ f.s.,
- $(X(t))_{t\geq 0}$ ein Gaußscher Prozess ist und
- $\mathbb{E}[X(t)] = 0$ für alle $t \geq 0$ sowie $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X(t), X(s)) = s \wedge t$ für alle $s, t \geq 0$.

Aufgabe T13.3 Ziel dieser Aufgabe ist es, $B(t)/t \xrightarrow{t\to\infty} 0$ zu zeigen.

(a) Begründen Sie, warum $(X_k^{(n)})_{0\leq k\leq 2^n}$ mit

$$X_k^{(n)} = |B(t + \tfrac{k}{2^n}) - B(t)|$$

für beliebiges $t \geq 0$ ein Submartingal ist.

(b) Zeigen Sie für alle $t \geq 0$ und $\lambda > 0$ die Ungleichung

$$P\left(\max_{0\leq k\leq 2^n} |X_k^{(n)}| \geq \lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

(c) Verwenden Sie die Stetigkeit von B, um für alle $t \geq 0$ und $\lambda > 0$ zu folgern:

$$P\left(\sup_{t\leq s\leq t+1} |B(t) - B(s)| \geq \lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

(d) Folgern Sie $\lim_{t\to\infty} B(t)/t$ f.s.

Aufgabe T13.4 Definiere den Prozess $Z = (Z(t))_{t\geq 0}$ als $Z(t) = tB(\frac{1}{t})\mathbb{1}_{t>0}$. Zeigen Sie, dass Z wieder Brownsche Bewegung ist.