LMU München
Mathematisches Institut
SS 2018

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Wahrscheinlichkeitstheorie: Übungsblatt 12

Falls nicht anders erwähnt ist φ eine maßerhaltende Transformation auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, während $X_n(\omega) = X(\varphi^n \omega)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ mit einer Zufallsvariable X.

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T12.1
(a) Sei $\mathcal{I} = \{A : \varphi^{-1}A = A \text{ f.s.}\}$ die Menge aller invarianten Ereignisse. Zeigen Sie, dass $\mathcal{I}$ eine σ-Algebra ist.
(b) Zeigen Sie: X ist $\mathcal{I}$-messbar genau dann wenn X invariant ist, d.h. $X \circ \varphi = X$ f.s.

Aufgabe T12.2 Zeigen Sie, dass der Bernoulli-Shift (Bspl. D) ergodisch ist, indem Sie einen Fourier-analytischen Ansatz ähnlich der Behandlung des Rotations-Beispiels C verwenden.

Aufgabe T12.3 Sei θ irrational. Zeigen Sie, dass $\{x_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ mit $x_n = n\theta \mod 1$ dicht in $[0, 1)$ liegt.

Aufgabe T12.4 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Irrfahrt auf einem zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ (also $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in V^{\mathbb{N}_0}$ und $P(X_{n+1} = w \mid X_n = v) = \deg(v)^{-1}\mathbb{1}_{\{\{w,v\}\in E\}}$) in stationärer Verteilung π, also $\pi(v) = \frac{\deg(v)}{2|E|}$. Sei weiterhin $f : V \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\sum_{v\in V} |f(v)|\pi(v) < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} f(X_m) \xrightarrow{\text{f.s., } L^1} \sum_{v\in V} f(v)\pi(v).$$

Hausaufgaben

Aufgabe H12.1 Sei $\varphi : \Omega \to \Omega$ eine beliebige messbare Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) φ ist maßerhaltend;

(ii) für alle $Y \in \mathcal{L}^1$ gilt $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y \circ \varphi]$;

(iii) für alle $Y \in \mathcal{L}^2$ gilt $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y \circ \varphi]$.

Aufgabe H12.2 Adaptieren Sie den Beweis für den Birkhoffschen Ergodensatz für eine L^p-Version, d.h. zeigen Sie: Sei $X \in \mathcal{L}^p$ mit $p > 1$. Dann gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} X(\varphi^m \omega) \xrightarrow{L^p} \mathbb{E}[X|\mathcal{I}].$$

Aufgabe H12.3

(a) Es gelte $g_n(\omega) \to g(\omega)$ f.s. für eine Folge messbarer Funktionen $(g, g_1, g_2, \ldots)$. Weiterhin gelte $\mathbb{E}[\sup_{n\in\mathbb{N}} |g_n|] < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{m=}^{n-1} g_m(\varphi^m \omega) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} \mathbb{E}[g|\mathcal{I}].$$

(b) Es gelte nun lediglich $g_n \xrightarrow{L^1} g$ als Voraussetzung. Zeigen Sie, dass sich die Aussage nun als Konvergenz in L^1 ergibt.

Aufgabe H12.4 Wir setzen $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k$ sowie $A_n = S_n/n$ und $D_n = \max\{A_1, \ldots, A_n\}$. Zeigen Sie: Für $\alpha > 0$ gilt

$$P(D_n > \alpha) \leq \alpha^{-1}\mathbb{E}[|X|].$$