LMU München
Mathematisches Institut
SS 2018

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Wahrscheinlichkeitstheorie: Übungsblatt 11

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T11.1 Zeigen Sie: Ist $X \in \mathcal{L}^1$ und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration, so ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $M_n = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]$ ein Martingal.

Aufgabe T11.2 Es seien $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige und zentrierte Zufallsvariablen mit reellen Werten. Zeigen Sie mit dem Martingalkonvergenzsatz, dass die Endlichkeit von $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[\xi_n^2]$ die fast sichere Konvergenz von $\sum_{n\in\mathbb{N}} \xi_n$ impliziert. Folgern Sie, dass die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} Z_n/n$ fast sicher konvergiert, wobei die Z_n i.i.d. mit $P(Z_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe T11.3

(a) Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegative reellwertige Zufallsvariablen. Man definiere

$$D = \{X_n = 0 \text{ für ein } n \geq 1\}$$

und nehme an, es existiere eine Funktion δ, sodass $\mathbb{E}[\mathbb{1}_D|X_1,\dots,X_n](\omega) \geq \delta(x) > 0$ für f.a. $\omega \in \{X_n \leq x\}$. Zeigen Sie mit Lévys Martingalkonvergenzsatz (H11.2), dass $P(D \cup \{\lim_n X_n = \infty\}) = 1$.

(b) Sei Z_n der Verzweigungsprozess aus H11.1 mit $p_0 > 0$. Zeigen Sie, dass

$$P\left(\lim_{n\to\infty} Z_n \in \{0,\infty\}\right) = 1.$$

Hausaufgaben

Aufgabe H11.1 Wir erinnern an den Galton-Watson-Verzweigungsprozess: Es sei $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine diskrete Verteilung und $(X_{n,i})_{n\in\mathbb{N},i\in\mathbb{N}}$ eine Doppelfolge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $P(X_{1,1}=k)=p_k$ sowie $\mu=\mathbb{E}[X_{1,1}]$. Wir definieren $Z_0=1$ und

$$Z_n=\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n,i}, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Insbesondere ist $Z_n=0$ falls $Z_{n-1}=0$. Sei schließlich $\mathcal{F}_n=\sigma(\{X_{k,i}:k\le n, i\in\mathbb{N}\})$ und $W_n=Z_n/\mu^n$.

(a) Zeigen Sie, dass $(W_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal ist.
(b) Sei $\mu<1$. Zeigen Sie, dass W_n fast sicher konvergiert und dass $P(\exists n\in\mathbb{N}:Z_n=0)=1$.
(c) Sei nun $\mu=1$ und $p_0>0$. Zeigen Sie, dass erneut $P(\exists n\in\mathbb{N}:Z_n=0)=1$.

Aufgabe H11.2 (Lévys Martingalkonvergenzsatz) Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration und $\mathcal{F}_\infty=\sigma(\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n)$. Sei $X\in\mathcal{L}^1$. Zeigen Sie, dass

$$Y_n:=\mathbb{E}[X\mid\mathcal{F}_n]\xrightarrow{n\to\infty}\mathbb{E}[X\mid\mathcal{F}_\infty] \qquad \text{f.s. und in } L^1.$$

Hinweis: Es mag hilfreich sein zu beobachten, dass $\cup_n\mathcal{F}_n$ ein $\cap$-stabiles System ist.

Aufgabe H11.3 Es seien $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. mit $Z_1\in\mathcal{L}^1$. Sei weiterhin θ eine von (Z_n) unabhängige, integrierbare Zufallsvariable und $Y_n=Z_n+\theta$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[\theta\mid Y_1,\dots,Y_n]\xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}}\theta.$$

Aufgabe H11.4 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal mit $|X_{n+1}-X_n|\le M<\infty$. Setze

$$\begin{aligned} C&=\{\text{Der f.s. Grenzwert von } X_n \text{ existiert und ist endlich}\},\\ D&=\{\liminf_n X_n=-\infty, \limsup_n X_n=\infty\}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $P(C\cup D)=1$.