LMU München
Mathematisches Institut
SS 2018

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Wahrscheinlichkeitstheorie: Übungsblatt 10

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T10.1 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, fairer Münzwürfe (d.h. $X_n \in \{K, Z\}$).
(a) Sei $T = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_{n-1}X_n = KZ\}$. Ist T eine Stoppzeit?
(b) Sei $S = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n X_{n+1} = KZ\}$. Ist S eine Stoppzeit?

Aufgabe T10.2
(a) Es sei $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ eine Stoppzeit. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $\{\tau > n\} \in \mathcal{F}_n$. Diese Messbarkeit bedeutet, dass wir zu jedem Zeitpunkt entscheiden können, ob das Stoppen bislang ausgeblieben ist.
(b) Es sei $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass τ genau dann eine Stoppzeit bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ist, wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.
(c) Es seien σ und τ Stoppzeiten bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Zeigen Sie, dass dann auch (i) $\sigma \wedge \tau$, (ii) $\sigma \vee \tau$, (iii) $\sigma + \tau$ Stoppzeiten sind.

Aufgabe T10.3 Es seien $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige, quadratintegrierbare Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $M_n := \left(\sum_{k=1}^n Z_k\right)^2 - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k^2]$, $n \geq 1$, und zeigen Sie, dass $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal ist.

Aufgabe T10.4 Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Submartingale bezüglich einer gemeinsamen Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Zeigen Sie, dass auch $(X_n \vee Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Submartingal ist.

Hausaufgaben

Aufgabe H10.1 Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig mit $P(X_n = \pm 2^n) = \frac{1}{2}$ und $M_n := \sum_{k=1}^n X_k$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Finden Sie die gröbste Filtration, bezüglich der $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal ist.
(b) Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich dieser ein Sub- oder Supermartingal?
(c) Erfüllt $(M_n)_n$ die Bedingung $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[M_n^+] < \infty$?
(d) Konvergiert $(M_n)_n$ f.s. gegen eine reellwertige Zufallsvariable?

Aufgabe H10.2 Es sei $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal und τ eine Stoppzeit. Zeigen Sie, dass $M^\tau := (M_{n\wedge\tau})_{n\in\mathbb{N}_0}$ auch ein Submartingal bezüglich der gleichen Filtration ist. Folgern Sie, dass die analoge Aussage im Falle eines (Super-)Martingals M gilt.

Aufgabe H10.3 Wir definieren die bezüglich einer Stoppzeit τ gestoppte σ-Algebra als

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} \mid \forall n \in \mathbb{N}:\ A \cap \{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_\tau$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$ ist.
(b) Zeigen Sie, dass τ bezüglich $\mathcal{F}_\tau$ messbar ist.
(c) Es seien σ und τ Stoppzeiten, welche $\sigma \le \tau$ erfüllen. Zeigen Sie: $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

Aufgabe H10.4

(a) Es sei $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{E}[M_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine konstante Folge ist.
(b) Nun sei M ein Submartingal, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $k \ge n$ mit $\mathbb{E}[M_k] \le \mathbb{E}[M_1]$ existiere. Zeigen Sie, dass M ein Martingal ist.