LMU München
Mathematisches Institut
SS 2018

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

# Wahrscheinlichkeitstheorie: Übungsblatt 9

## Tutoriumsaufgaben

Falls nicht anders vermerkt, sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{G}, \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ Teil-$\sigma$-Algebren.

**Aufgabe T9.1** Beweisen Sie folgende bedingte Form der Chebyshev-Ungleichung: Für $c > 0$ gilt

$$P(|X| \geq c \mid \mathcal{A}) \leq \frac{\mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{A}]}{c^2}.$$

**Aufgabe T9.2** Seien $X, Y \in \mathcal{L}^2$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}\big[X\,\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}\big[Y\,\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big]$.

**Aufgabe T9.3** Bestimmen Sie $\mathbb{E}\left[X \mid \sigma(\{[0, \frac{1}{2})\})\right]$, wobei $X : \omega \mapsto \omega$ die Identität auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathcal{U}_{(0,1)})$ ist.

**Aufgabe T9.4** Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X \mid X^2]$ für $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

**Aufgabe T9.5**
(a) Sei $X \in \mathcal{L}^2$ und $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = \{Y \in \mathcal{L}^2(P) : Y \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}\}$. Zeigen dass $f : \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$ mit $f(Y) = \mathbb{E}[(X-Y)^2]$ von $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$ minimiert wird.
(b) Zeigen Sie, dass $|\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]| \leq \mathbb{E}[|X| \mid \mathcal{A}]$.
(c) Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass $\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{A}]$.
(d) Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ und $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ $\mathcal{A}$-messbar. Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

# Hausaufgaben

**Aufgabe H9.1** Sei $G \in \mathcal{G}$ und $A \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie die Bayes-Formel, nämlich

$$P(G \mid A) = \frac{\int_G \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{G}]\,\mathrm{d}P}{\int_\Omega \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{G}]\,\mathrm{d}P}.$$

**Aufgabe H9.2** Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{G}]^2 \leq \mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}] \cdot \mathbb{E}[Y^2|\mathcal{G}].$$

**Aufgabe H9.3** Geben Sie ein Beispiel auf $\Omega = \{a, b, c\}$ an, für das

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] \mid \mathcal{G}] \neq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \mid \mathcal{A}].$$

**Aufgabe H9.4** Wir definieren $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X \mid \mathcal{G}) := \mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]^2$ für $X \in \mathcal{L}^2$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}[\mathbb{V}\mathrm{ar}(X \mid \mathcal{G})] + \mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]).$$

**Aufgabe H9.5** Sei $X \in \mathcal{L}^2$ und nehme an, dass $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \overset{d}{=} X$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$ fast sicher.