LMU München
Mathematisches Institut
SS 2018

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Wahrscheinlichkeitstheorie: Übungsblatt 8

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T8.1 Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $0 < \sigma^2 < \infty$, und sei $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$h_n(\alpha) = P(S_n \leq \alpha n).$$

Bestimmen Sie $h = \lim_{n\to\infty} h_n$.

Aufgabe T8.2 Gegeben sei ein unabhängiges $\triangle$-Schema $\left((X_{n,l})_{l=1}^{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathbb{E}[X_{n,l}] = \mu_{n,l}$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_{n,l}) = \sigma_{n,l}^2$ sowie $s_n^2 = \sum_{l=1}^{k_n} \sigma_{n,l}^2$. Die Lyapunov-Bedingung für dieses $\triangle$-Schema besagt

$$\exists \delta > 0: \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{l=1}^{k_n} \mathbb{E}\left[|X_{n,l} - \mu_{n,l}|^{2+\delta}\right] = 0.$$

Zeigen Sie, dass die Lyapunov-Bedingung die Lindeberg-Bedingung impliziert.

Aufgabe T8.3 Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathrm{Ber}(p_n)$, wobei $p_n \in (0,1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass das zugehörige zentrierte und normierte Dreiecksschema $((Y_{n,k})_{k=1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$Y_{n,k} = \frac{X_k - \mathbb{E}[X_k]}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}}$$

die Lindeberg-Bedingung genau dann erfüllt, wenn $\sum_{n\geq 1} p_n(1-p_n) = \infty$.

Aufgabe T8.4 Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariablen mit

$$P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \qquad P(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}.$$

Zeigen Sie, dass $(X_k/\sqrt{a_n})_{n\in\mathbb{N}, 1\leq k\leq n}$ mit $a_n := \sum_{k=1}^n (2 - k^{-2})$ ein zentriertes, normiertes, unabhängiges Dreiecksschema ist, aber

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{a_n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{N}\left(0, \tfrac{1}{2}\right) \quad (n \to \infty).$$

Hausaufgaben

Aufgabe H8.1 Sei $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 \in (0,\infty)$. Definiere

$$X_k = \xi_k - 3\xi_{k+1} + \xi_{k+2}, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad k,n \in \mathbb{N}.$$

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X_k]$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_k)$.
(b) Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)}} \le x\right).$$

Aufgabe H8.2 Es sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge unabhängiger Zufallsvariablen (d.h. es existiert $M > 0$ sodass $|X_k| \le M$ für alle k) und $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Es gelte weiterhin $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_k) = \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Aufgabe H8.3 Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge an i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = 0, \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = 1$. Finden Sie Z, sodass

$$n^{-3/2} \sum_{k=1}^{n} kX_k \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z.$$

Aufgabe H8.4 Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$P(X_k = \pm k) = \tfrac{1}{2}k^{-\beta}, \qquad P(X_k = 0) = 1 - k^{-\beta},$$

wobei $\beta > 0$. Setze $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
(a) Sei $\beta > 1$. Zeigen Sie, dass dann S_n fast sicher konvergiert.
(b) Sei $\beta < 1$. Zeigen Sie, dass dann eine Konstante $c = c(\beta)$ existiert, sodass

$$\frac{S_n}{n^{(3-\beta)/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} c\mathcal{N}(0,1).$$

(c) Sei $\beta = 1$. Zeigen Sie, dass dann $S_n/n \xrightarrow{d} Z$, wobei Z die charakteristische Funktion

$$\varphi(t) = \varphi_Z(t) = \exp\left(\int_0^1 \frac{\cos(xt)) - 1}{x}\,\mathrm{d}x\right)$$

besitzt. *Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die folgende Aussage benutzen: Falls*
 - $\max_{k\le n} |c_{k,n}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$,
 - $\sum_{k=1}^n c_{k,n} \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$,
 - $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^n |c_{k,n}| < \infty$,

dann gilt $\prod_{k=1}^n (1 + c_{k,n}) \xrightarrow{n\to\infty} e^\lambda$.
(d*) *Bonus: Zeigen Sie den Hinweis aus Teilaufgabe (c).*