LMU München
Mathematisches Institut
SS 2018

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Wahrscheinlichkeitstheorie: Übungsblatt 7

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T7.1 Ziel dieser Aufgabe ist es, folgende Proposition zu zeigen: Sei X eine Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion φ und sei $u > 0$. Dann gilt

$$P\left(|X| > \tfrac{2}{u}\right) \leq \frac{1}{u} \int_{-u}^{u} (1 - \varphi(t))\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie hierfür zuerst

$$\int_{-u}^{u} (1 - e^{itx})\,\mathrm{d}t = 2\left(u - \tfrac{\sin(ux)}{x}\right).$$

(b) Zeigen Sie damit

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u} (1 - \varphi(t))\,\mathrm{d}t = 2\int_{\mathbb{R}} \left(1 - \tfrac{\sin(ux)}{ux}\right) P_X(\,\mathrm{d}x).$$

(c) Nutzen Sie Teilaufgabe (b), um die Aussage zu folgern.

Aufgabe T7.2

(a) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion einer doppelt-exponentialverteilten Zufallsvariable X, d.h. $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

(b) Bestimmen Sie mit der Fourier-Umkehrformel und (a) die charakteristische Funktion einer Cauchy-verteilten Zufallsvariable Y, d.h. $f_Y(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

(c) Seien $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und Cauchy-verteilt. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n}(Y_1 + \ldots + Y_n) \stackrel{d}{=} Y_1$ für $n \in \mathbb{N}$ wieder Cauchy-verteilt ist und folgern Sie, dass Y kein erstes Moment hat.

Aufgabe T7.3

(a) Zeigen Sie: Es existieren stetige Zufallsvariablen, deren charakteristische Funktion nicht absolut integrierbar sind.

(b) Sei φ die charakteristische Funktion einer ZV X. Ist $|\varphi|$ dann auch wieder eine charakteristische Funktion?

Hausaufgaben

Aufgabe H7.1 Sei φ die charakteristische Funktion einer ZV X. Zeigen Sie, dass φ dann positiv definit im folgenden Sinne ist:

$$\sum_{j,k=1}^{n} \varphi(t_j - t_k)\xi_j\overline{\xi_k} \geq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe H7.2 Sei $\varphi = \varphi_X$ die charakteristische Funktion einer symmetrischen Zufallsvariable X. Zeigen Sie die Ungleichung $1 - \varphi(2t) \leq 4(1 - \varphi(t))$.

Aufgabe H7.3

(a) Es sei $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die charakteristische Funktion einer reellwertigen Zufallsvariablen X. Zeigen Sie, dass es eine Zufallsvariable Y gibt, sodass $\varphi_Y = |\varphi_X|^2$.

(b) Geben Sie die Verteilung einer Zufallsvariablen Y an, sodass $\varphi_Y(t) = \frac{1}{1+t^2}$ für $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe H7.4 Es sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subseteq [0, \infty)$ eine Folge nicht-negativer Zahlen mit $\sum_{k \geq 0} a_k = 1$. Finden Sie Zufallsvariablen X, Y, sodass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\text{(a) } \varphi_X(t) = \cos t, \qquad \text{(b) } \varphi_Y(t) = \sum_{k \geq 0} a_k \cos(kt).$$