LMU München
Mathematisches Institut
SS 2018

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Wahrscheinlichkeitstheorie: Übungsblatt 5

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T5.1 Zeigen Sie: $X_n \xrightarrow{P} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{d} X$.

Aufgabe T5.2 Es sei a_n eine reelle Nullfolge und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, sodass X_n/a_n einen schwachen Grenzwert hat. Zeigen Sie, dass dies $X_n \xrightarrow{P} 0$ impliziert.

Aufgabe T5.3 Zeigen Sie, dass sich jedes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ schwach durch die diskreten Maße $\mu_n := \sum_{z=-\infty}^{\infty} \mu((\frac{z}{n}, \frac{z+1}{n}])\delta_{\frac{z}{n}}$ approximieren lässt.

Aufgabe T5.4 Es gelte $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$. Zeigen Sie:
(a) $\mathbb{E}(|X|) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n|)$;
(a) wenn $p > 0$ und $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|^r) < \infty$ für ein $r > p$, dann $\mathbb{E}(|X|^p) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n|^p)$.

Hausaufgaben

Aufgabe H5.1 Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und X Zufallsvariablen, $a, c \in \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $X_n \xrightarrow{d} c \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{P} c$,

(b) $X_n \xrightarrow{d} X \quad \Longrightarrow \quad g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$,

(c) $X_n \xrightarrow{d} X$ und $Y_n \xrightarrow{d} c, Z_n \xrightarrow{d} a \quad \Longrightarrow \quad Z_n X_n + Y_n \xrightarrow{d} aX + c$,

(d) Aussagen (a) und (c) werden im Allgemeinen falsch, wenn a und c durch nichttriviale Zufallsvariablen ersetzt werden.

Aufgabe H5.2 Es seien $Q \ll P$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{F})$. Seien weiterhin $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und X Zufallsvariablen auf Ω. Zeigen Sie:

(a) $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$ bzgl. $P \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$ bzgl. Q;

(b) $X_n \xrightarrow{P} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{Q} X$ (d.h. Konvergenz in Wahrscheinlichkeit bzgl. P impliziert Konvergenz in Wahrscheinlichkeit bzgl. Q).

Aufgabe H5.3

(a) Sei F_X die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable X. Wie viele Unstetigkeitsstellen kann F_X maximal besitzen?

(b) Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und X Zufallsvariablen mit zugehörigen Verteilungsfunktionen F_n bzw. F und der Eigenschaft $X_n \xrightarrow{d} X$. Zeigen Sie, dass dann ein Wahrscheinlichkeitsraum existiert und auf diesem Zufallsvariablen $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Y mit jeweiligen Verteilungsfunktionen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. F, sodass $Y_n \xrightarrow{\text{f.s.}} Y$.

Aufgabe H5.4 Seien F, G zwei Verteilungsfuntkionen. Wir definieren

$$\rho(F, G) := \inf\{\varepsilon \geq 0 : F(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq G(x) \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie, dass ρ auf dem Raum aller Verteilungsfunktionen eine Metrik definiert. Seien weiterhin $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und X Zufallsvariablen mit zugehörigen Verteilungsfunktionen F_n und F. Zeigen Sie, dass

$$\rho(F_n, F) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{d} X.$$