LMU München
Mathematisches Institut
SS 2018

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Wahrscheinlichkeitstheorie: Übungsblatt 4

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T4.1 Es werden zwei Punkte Punkte zufällig gleichverteilt und unabhängig auf dem Einheitskreis $\mathbb{S}_1$ gewählt. Bezeichne Y_2 die Länge des längeren Kreissegments von $\mathbb{S}_1$, welches keinen der beiden Punkte enthält. Nun werden iterativ weitere Punkte (unabhängig und gleichverteilt auf $\mathbb{S}_1$) hinzugefügt. Beschreibe Y_n die Länge des längsten Kreissegments bei n Punkten. Zeigen Sie, dass $Y_n \to 0$ fast sicher.

Aufgabe T4.2 Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei Ω höchstens abzählbar sei und $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Zeigen Sie:

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \Longleftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X.$$

Aufgabe T4.3 Seien $X, X_1, X_2, \dots$ nichtnegative, reellwertige Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^1$. Zeigen Sie:

$$X_n \xrightarrow{P} X \text{ und } \mathbb{E}[X_n] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[X] \quad \Longleftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^1} X.$$

Aufgabe T4.4 Seien $X_1, X_2, \dots$ reellwertige i.i.d. Zufallsvariablen.

(a) Zeigen Sie:

(i) $\forall\, \varepsilon > 0: \ P(|X_n| \geq \varepsilon n \text{ unendlich oft}) = 0 \iff \mathbb{E}[|X_1|] < \infty.$

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0: \ P(|X_n| \geq \varepsilon n \text{ unendlich oft}) = 1 \iff \mathbb{E}[|X_1|] = \infty.$

(b) Zeigen Sie, dass

$$P\left(\frac{\max_{k\leq n} |X_k|}{n} \to 0\right) = 1 \iff \mathbb{E}[|X_1|] < \infty.$$

Hausaufgaben

Aufgabe H4.1 Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Ereignisse. Zeigen Sie

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \xrightarrow{P} 0.$$

Aufgabe H4.2 Es sei X_n rekursiv wie folgt definiert: Sei $X_0 \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ uniform auf $[0,1]$ verteilt und für $n \geq 1$ sei $X_n \sim \mathcal{U}_{[0,X_{n-1}]}$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n}\log X_n$ fast sicher konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.
Hinweis: Nutzen Sie das starke Gesetz der großen Zahlen.

Aufgabe H4.3 Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{M}$ der Raum aller Zufallsvariablen
$X : \Omega \to \mathbb{R}$. Für $X, Y \in \mathcal{M}$ definiere

$$d(X,Y) := \mathbb{E}\left[\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right].$$

(a) Zeigen Sie, dass $d(X_n, X) \to 0$ genau dann, wenn $X_n \xrightarrow{P} X$.
(b) Zeigen Sie: Nennen wir X und Y äquivalent, falls $X = Y$ f.s., so bilden die Äquivalenzklassen auf $\mathcal{M}$ zusammen mit d einen vollständigen metrischen Raum.

Aufgabe H4.4 Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichgradig integrierbare Folge von Zufallsvariablen und $X \in \mathcal{L}^1$. Zeigen Sie, dass $(X_n - X)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar ist.