LMU München
Mathematisches Institut
SS 2018

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Wahrscheinlichkeitstheorie: Übungsblatt 3

Wir erinnern an folgende Definition aus der Stochastik:

Definition 1. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, X eine Zufallsvariable.

- Wir sagen, dass $X_n \to X$ *fast sicher* (und schreiben $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$), falls $P(|X_n - X| \xrightarrow{n\to\infty} 0) = 1$.
- Wir sagen, dass $X_n \to X$ *in Wahrscheinlichkeit* (und schreiben $X_n \xrightarrow{P} X$), falls für alle $\varepsilon > 0 : P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T3.1 Seien $\{X_{i,j}\}_{1\le i\le n, 1\le j\le k_i}$ unabhängige Zufallsvariablen und $f_i : \mathbb{R}^{k_i} \to \mathbb{R}$ messbare Abbildungen. Zeigen Sie, dass auch $\{f_i(X_{i,1},\dots,X_{i,k_i})\}_{1\le i\le n}$ unabhängig sind.

Aufgabe T3.2 Zeigen Sie: Zwei Ereignisse A und B sind genau dann unabhängig, wenn die zugehörigen Indikatoren $\mathbb{1}_A$ und $\mathbb{1}_B$ unabhängig sind.

Aufgabe T3.3

(a) Es sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge der Ereignisse $A_k = \{X_k \in B_k\}$ auf einem Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{F})$ für messbare B_k und Zufallsvariablen X_k. Gilt $\liminf_{n\to\infty} A_k \in \mathcal{T}$?

Sei nun $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Überprüfen Sie, ob folgende Ereignissen in $\mathcal{T}$ liegen:

(b) $\{\lim_{n\to\infty} S_n \text{ existiert}\}$,

(c) $\{\limsup_{n\to\infty} S_n > 0\}$,

(d) $\{\limsup_{n\to\infty} S_n/c_n > x\}$ für ein $x \in \mathbb{R}$ und eine Folge c_n mit $c_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

Aufgabe T3.4 Zeigen Sie:

(a) $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X \iff \forall\varepsilon > 0 : P\Big(\sup_{m\ge n} |X_m - X| > \varepsilon\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(b) $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X \implies X_n \xrightarrow{P} X$.

(c) Ist X_n monoton fallend, so gilt $X_n \xrightarrow{P} X \implies X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$.

(d) $X_n \xrightarrow{P} X$, so existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $X_{n_k} \xrightarrow{\text{f.s.}} X$.

Hausaufgaben

Aufgabe H3.1 Sei $s > 1$ und $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ Weiter sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein W-Raum mit $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ und P gegeben durch

$$P(\{n\}) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Definiere für $r \in \mathbb{N}$ das Ereignis $A_r = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist durch } r \text{ teilbar}\}$. Sei eine teilerfremde Folge $r_1, \ldots, r_k$ an natürlichen Zahlen gegeben. Zeigen Sie, dass die Ereignisse $(A_{r_i})_{i=1}^{k}$ unabhängig sind.

(b) Definiere $\mathcal{P}_n = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ ist Primzahl und } p \leq n\}$ sowie $\mathcal{P}_\infty = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$. Zeigen Sie

$$P(\{n \in \mathbb{N} : k^2 \text{ ist kein Teiler von } n \text{ für alle } k \geq 2\}) = \prod_{p \in \mathcal{P}_\infty} (1 - p^{-2s}).$$

Aufgabe H3.2 Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \mu)$ mit dem Lebesgue-Maß μ. Definiere $X_n(\omega) = \sin(2\pi n \omega)$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die X_n sind unkorreliert (d.h. $\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]$ für $i \neq j$), aber nicht unabhängig.

Aufgabe H3.3 Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \mu)$ mit dem Lebesgue-Maß μ. Sei

$$Y_n(\omega) = \mathbb{1}_{\{\lfloor 2^n \omega \rfloor \text{ ist gerade}\}}.$$

Zeigen Sie, dass die $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine unabhängige, Bernoulli(1/2)-verteilte Folge an Zufallsvariablen sind.

Aufgabe H3.4 Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, die in Wahrscheinlichkeit gegen X konverviert, also $X_n \xrightarrow{P} X$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass X fast sicher konstant ist.